سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1444 هـ - 2022 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلّم

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1445هـ - 2023م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من دليل المعلّم – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Mathematics Digital Teacher's Resource
للمؤلفين جوليا فلتشر، وإيلين دورسيت، وكولين ناي.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يـا رَبَّنـا احْفَـظْ لـنـا جَـلالَـةَ الـسُّـلْـطـان
وَالشَّعْبَ فـي الأَوْطـان بِـالْـعِـزِّ والأَمـان
وَلْـيَـدُمْ مـُؤَيَّـدًا عـاهِـلاً مُـمَـجَّـدًا

بِالنُّفـوسِ يُفْتَـدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِـياءُ مِـنْ كِـرامِ الْعَرَبِ
فـارْتَقـي هـامَ السَّمـاء وَامْلَئي الْكَـوْنَ ضِيـاء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة xiii

الوحدة السادسة: الأسس واللوغاريتمات

مخطط توزيع الدروس ١٥

٦-١ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية . ١٦

٦-٢ اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ (اللوغاريتم الاعتيادي) ١٨

٦-٣ قوانين اللوغاريتمات ٢١

٦-٤ حل المعادلات اللوغاريتمية ٢٣

٦ - ٥ حل المعادلات الأسّية باستخدام اللوغاريتمات ٢٤

العرض التوضيحي الإلكتروني (٦-١): التحويل ما بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ٢٥

العرض التوضيحي الإلكتروني (٦-٢): حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتم الإعتيادي ٣٢

إجابات تمارين كتاب الطالب ٤٤

إجابات تمارين كتاب النشاط ٤٦

حلول تمارين كتاب الطالب: الأسس واللوغاريتمات ٤٩

الوحدة السابعة: المصفوفات

مخطط توزيع الدروس ٦٣

٧-١ رتبة المصفوفة وأنواع المصفوفات ٦٤

٧-٢ جمع وطرح المصفوفات ٦٦

٧-٣ ضرب المصفوفات

٧-٣أ الضرب القياسي ٦٨

٧-٣ب ضرب مصفوفة بأخرى ٧٠

٧-٤ محدد المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢ ...... ٧٢

٧-٥ معكوس المصفوفة ٧٣

العرض التوضيحي الإلكتروني (٧-١): ضرب مصفوفة في أخرى ٧٦

العرض التوضيحي الإلكتروني (٧-٢): معكوس المصفوفة ٨٨

إجابات تمارين كتاب الطالب ٩٣

إجابات تمارين كتاب النشاط ٩٦

حلول تمارين كتاب الطالب: المصفوفات ٩٩

الوحدة الثامنة: التباديل والتوافيق

مخطط توزيع الدروس ١١١

٨-١ مضروب العدد ١١٢

٨-٢ التباديل

٨-٢أ تباديل ن من العناصر المختلفة ١١٤

٨-٢ب تباديل ن من العناصر بعضها متشابه . ١١٦

٨-٢ج تباديل ن من العناصر المختلفة بوجود القيود ١١٩

٨-٢د تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة ١٢١

٨-٣ التوافيق ١٢٣

العرض التوضيحي الإلكتروني (٨-١): التباديل ١٢٦

العرض التوضيحي الإلكتروني (٨-٢): التباديل مع القيود ١٣٣

إجابات تمارين كتاب الطالب ١٤٠

إجابات تمارين كتاب النشاط ١٤٢

حلول تمارين كتاب الطالب: التباديل والتوافيق ١٤٤

الوحدة التاسعة: مفكوك ذات الحدين

مخطط توزيع الدروس ١٥١

٩-١ مفكوك ذات الحدَّين باستخدام مثلث باسكال ١٥٢

٩-٢ مفكوك ذات الحدّين باستخدام الحد العام ١٥٣

إجابات تمارين كتاب الطالب ١٥٤

إجابات تمارين كتاب النشاط ١٥٥

حلول تمارين كتاب الطالب: مفكوك ذات الحدَّين ١٥٧

المُقدِّمة

صُمّم هذا الدليل ليساعد المعلمين على استخدام المواد التعليمية لتدريس منهج الرياضيات الأساسية للصف الحادي عشر.

اعتمدنا في إعداد هذا الدليل على مصادر عالية الجودة لتشجيع الطلبة على التعلم، ولمساعدتهم على تطوير فهم عميق للموضوع. تعدّ مهارة التواصل الرياضي مهمة ليس فقط لهدف تعلم المادة، ولكن لمساعدة الطلبة على تطوير المهارات التي يحتاجون إليها للتعاون، والتفكير والتحليل، واتخاذ القرارات المناسبة في بيئة العمل وفي مناحي الحياة المختلفة.

في هذا الدليل نناقش كل موضوع، ونقترح مصادر للتعلم، ونبحث في كيفية دعم بعض الطلبة وتحدي آخرين.

المعلم هو الأقرب إلى طلابه ومعرفة مستوياتهم في المادة، لذا فإنه يمكنك وضع خطط التدريس الخاصة بك؛ من خلال اختيار المناسب ممّا نقدمه لك في هذا الدليل، أو من مصادرك الخاصة.

لقد وضعنا في هذا الدليل شروحات وتوجيهات وكثيرًا من الأفكار العملية لكيفية استخدام مصادر إضافية في غرفة الصف. كما أننا سلطنا الضوء على الأمثلة والأسئلة والتمارين وأنشطة 'استكشف'، الموجودة في كتاب الطالب فضلًا عن الملاحظات المدوّنة لكيفية استخدامها في معالجة سوء الفهم وأخطاء شائعة معينة.

تتضمن كل وحدة من وحدات الدليل شرائح عرض إلكتروني (باوربوينت) يمكنك أن تستخدمها كما هي أو تعديلها لإدارة المناقشة الصفية. بعض هذه الشرائح مبني على أمثلة من كتاب الطالب، وبعضها الآخر مكمل لها. في بعض الوحدات تتوافر مصادر إضافية مثل بطاقات الفرز أو "أوراق ملء الفراغ" وغيرها. يمكنك أن توائم هذه الأنشطة لتستخدمها في موضوعات أخرى.

هدفنا أن تؤدي هذه المصادر إلى توفير الوقت، وأن ترسّخ معرفتك في هذا الدليل، وتعزّز الثقة في قدراتك لتزوّد الطلبة بأفضل الخبرات.

نأمل أن يحقق هذا الدليل لك وللطلبة المزيد من المنفعة والاستمتاع.

الوحدة السادسة :

الأسس واللوغاريتمات Exponents and logarithms

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	مصادر أخرى	المفردات
٦-١ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية	٦-١ يحوّل بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ذات الأساس العام أ	٤	استكشف ١ الأمثلة من ١ إلى ٥ تمارين ٦-١	شرائح العرض التوضيحي ٦-١	الأسّ، الأساس، اللوغاريتم
٦-٢ اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ (اللوغاريتم الاعتيادي)	٦-٢ يحوّل بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ذات الأساس ١٠.	٣	استكشف ٢ الأمثلة من ٦ إلى ٩ تمارين ٦-٢		اللوغاريتم الاعتيادي
٦-٣ قوانين اللوغاريتمات	٦-٣ يبسّط اللوغاريتمات ذات الأساس المتشابه ويوجد قيمتها باستخدام قوانين اللوغاريتمات.	٣	استكشف ٣ الأمثلة من ١٠ إلى ١٢ تمارين ٦-٣		القوة
٦-٤ حل المعادلات اللوغاريتمية	٦-٤ يحل المعادلات اللوغاريتمية.	٤	الأمثلة من ١٣ إلى ١٦ تمارين ٦-٤		المعادلة اللوغاريتمية
٦-٥ حل المعادلات الأسّية باستخدام اللوغاريتمات	٦-٤ يحل المعادلات اللوغاريتمية. ٦-٥ يحل المعادلات الأسية (فقط تلك التي تتحول إلى معادلات خطية). ٦-٦ يستخدم المعادلات اللوغاريتمية والأسية كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية ويفسرها.	٤	الأمثلة من ١٧ إلى ٢٣ تمارين ٦-٥	شرائح العرض التوضيحي ٦-٢	
تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة		٣			

٦-١ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية

المفردات

الأساس: عدد أو متغير مرفوع إلى قوة، مثلًا ٥^{٢} الأساس هو ٥

الأسّ: القوة، مثلًا ٥^{٢} الأس هو ٢

اللوغاريتم: هو قوة أو أسّ

ملاحظات للمعلِّمين

- بما أن موضوع اللوغاريتم سيكون جديدًا بالنسبة إلى جميع الطلبة، فمن المهم أن يألفوا المفاهيم الأساسية والرموز الرياضية المتعلقة بالموضوع.
- أكد على أن اللوغاريتم هو قوة (أو أسّ) وعلى أن أحد أهم الخصائص المفيدة للوغاريتم رياضيًا، أنه يسمح لنا بإيجاد قيمة القوة (أس) س في المعادلة الأسية ص = أ^{س}
- استخدم شريحة التوضيح الإلكتروني ٦-١ لتعرف الطلبة على عملية التحويل بين الصيغة اللوغاريتمية والصيغة الأسّية. أكّد على أنها تشكل طريقتَين للتعبير عن المعلومة نفسها، بالضبط كما تشكل أ = ب + ٢، ب = أ -٢ أو ص = ٢س، س = $\frac{ص}{٢}$ طريقتَين للتعبير عن المعلومة نفسها.
- أعطِ الطلبة كلّ التمارين التي يحتاجون إليها للتحويل بين هاتَين الصيغتَين.

أفكار للتعليم

- اطلب من الطلبة أن يبتكروا طرائق تخيلية لتمييز الأساس، الأسّ، والقيمة في أزواج من عبارات متكافئة مثل ٤^{٣} = ٦٤، لـو$_{٤}$ ٦٤ = ٣
- أكد على أنه يسهل التحقق من إجابات المعادلات البسيطة من خلال التحويل إلى الصيغة الأسّية والتعويض. على سبيل المثال: س = ٤ هو حل صحيح للمعادلة س = لـو$_{٣}$ ٨١ إذا ٣^{٤} = ٨١

دعم الطلبة

استخدام مجموعة أسئلة من الصح والخطأ تتضمن التحويل بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية تساعد في بناء ثقة الطلبة وتعزيز إمكانياتهم. يمكنهم العمل في مجموعات ثنائية حيث يكتب الأول تحويلًا ويقرر الثاني ما إذا كان صحيحًا أم خاطئًا.

تحدّي الطلبة

يمكن للطلبة محاولة حل السؤالين ٦ و٧ في تمارين ٦-١ في مجموعات ثنائية، لأن هذه التمارين تتطلب فهمًا أعمق. يمكنك أن تكلفهم وضع قاعدة لكيفية إيجاد قيمة لـو$_{أ}$ ب^{ن} إذا كانوا يعرفون قيمة لـو$_{أ}$ ب.

القاعدة، التي سيتم دراستها في الدرس الخاص بقوانين اللوغاريتمات، هي أنه عندما تزداد قوة ب من ١ إلى ن، يتم ضرب اللوغاريتم في ن. على سبيل المثال، إذا علمنا أن لـو$_{٢}$ (٣^{١}) = ١,٥٨٥ فإن لـو$_{٢}$ (٣^{٤}) = ٤ × ١,٥٨٥، لـو$_{٢}$ (٣^{١٠}) = ١٠ × ١,٥٨٥

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

أ) ج = −٣، هـ = ٣، و = ٢، يمكن التعبير عن كل أعداد الأساس كقوى بسيطة لـ ٨

ب) ز، ح

ج) أ، ب، د

لا يمكننا الحصول على ٨ من خلال إعطاء قوة لعدد سالب أو ١ أو ٠ (لا يمكن للوغاريتم أن يكون له أساس سالب أو صفر أو ١).

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦−١

مصادر أخرى مفيدة

اكتشف الروابط الآتية حول الأسس واللوغاريتمات في الموقع Underground Mathematics

Biography of John Napier (inventor of logarithms) (St Andrews)
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/

Log lattice
https://undergroundmathematics.org/exp-and-log/log-lattice

٦-٢ اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ (اللوغاريتم الاعتيادي)

المفردات

اللوغاريتم الاعتيادي: هو لوغاريتم ذو الأساس ١٠؛ يُكتب اللوغاريتم ذو الأساس ١٠ لـ س في صورة لـو س

ملاحظات للمعلِّمين

- يتعلق هذا الدرس باللوغاريتم ذي الأساس ١٠ فقط. تأكد من معرفة الطلبة لمفتاح اللوغاريتم ذي الأساس ١٠ على الحاسبة.
- من الأمور المهمة التي يجب أخذها بعين الاعتبار في هذا الدرس هي أننا إذا ضربنا عددًا في ١٠^س، فإن أساس اللوغاريتم ١٠ فيه يزيد بمقدار س، وأننا إذا قسمنا عددًا على ١٠^س، فإن أساس اللوغاريتم ١٠ فيه ينقص بمقدار س. مثلًا: لـو ٢٤ ≈ ١,٣٨، إذًا لـو ٢٤٠ ≈ ٢,٣٨، لـو ٢,٤ ≈ ٠,٣٨

أفكار للتعليم

- اطلب من الطلبة أن يتحققوا من إجابات مجموعة من الأسئلة مثل «ما هي قيم لـو ١٠٠، لـو ١٠٠٠، لـو ١٠٠٠٠٠٠، لـو ٠,١، لـو ٠,٠٠١؟»
- ناقش معهم حقيقة أن لـو ١٠ = ١، لـو ١٠٠ = ٢، إذًا اللوغاريتم الاعتيادي للأعداد بين ١٠، ١٠٠ وجب أن تكون جميعها بين ١، ٢. وبالمثل، يجب أن يقع اللوغاريتم الاعتيادي لجميع الأرقام التي بين ١، ١٠ بين ٠، ١ لأن لـو ١ = ٠ ، لـو ١٠ = ١

هذا الأمر يمنح المعلم فرصة لمواصلة مناقشة استخدام المقاييس اللوغاريتمية، والتي تكون ذات فائدة خصوصًا عندما تحتوي مجموعة من البيانات على قيم أكبر بكثير من غيرها. فمقياس درجة الحموضة (pH)، الذي يمتد من ٠ إلى ١٤، هو مقياس لتركيز أيونات الهيدروجين في محلول ما.

كلما زاد تركيز أيونات الهيدروجين، زادت الحموضة وانخفضت درجتها.

كلما انخفض تركيز أيونات الهيدروجين، انخفضت الحموضة، وارتفعت درجتها.

درجة الحموضة تساوي اللوغاريتم الاعتيادي لمعكوس تركيز أيونات الهيدروجين (H^+) ويتم حسابه على النحو الآتي:

$$\text{درجة الحموضة} = \text{لـو}\left(\frac{1}{H^+}\right)$$

يمكن أن يتراوح تركيز أيونات الهيدروجين في أي محلول من ١ كحد أقصى (شديد الحموضة) إلى نحو ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠١ كحد أدنى.

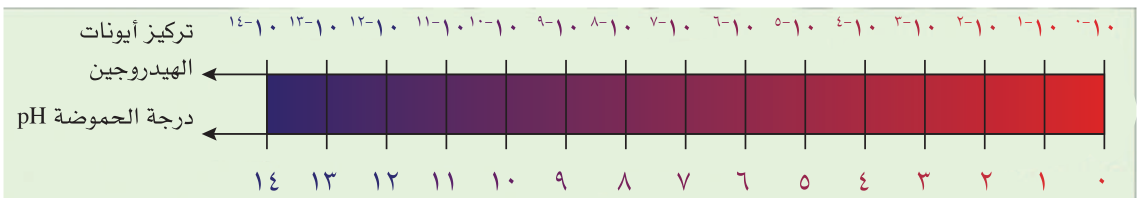
يبيّن الجدول جميع خطوات تحويل تركيز أيونات الهيدروجين H^+ إلى درجة الحموضة (pH) لقيم تصل إلى درجة الحموضة ٧ pH.

تركيز أيونات الهيدروجين، H^{+}	المعكوس $\frac{١}{H^{+}}$	حسابات التحويل	درجة الحموضة pH
١	١	درجة الحموضة = لـو ١ = لـو ١٠^{٠}	٠
٠٫١	١٠	درجة الحموضة = لـو ١٠ = لـو ١٠^{١}	١
٠٫٠١	١٠٠	درجة الحموضة = لـو ١٠٠ = لـو ١٠^{٢}	٢
٠٫٠٠١	١٠٠٠	درجة الحموضة = لـو ١٠٠٠ = لـو ١٠^{٣}	٣
٠٫٠٠٠١	١٠٠٠٠	درجة الحموضة = لـو ١٠٠٠٠ = لـو ١٠^{٤}	٤
٠٫٠٠٠٠١	١٠٠٠٠٠	درجة الحموضة = لـو ١٠٠٠٠٠ = لـو ١٠^{٥}	٥
٠٫٠٠٠٠٠١	١٠٠٠٠٠٠	درجة الحموضة = لـو ١٠٠٠٠٠٠ = لـو ١٠^{٦}	٦
٠٫٠٠٠٠٠٠١	١٠٠٠٠٠٠٠	درجة الحموضة = لـو ١٠٠٠٠٠٠٠ = لـو ١٠^{٧}	٧

إن تغيير وحدة واحدة في قيمة درجة الحموضة (pH) يقابل تغيير بعامل ١٠ في تركيز أيونات الهيدروجين (H^{+}).

يقابل الزيادة في درجة الحموضة من ١ إلى ٧، انخفاض في تركيز أيونات الهيدروجين بعامل

$$\frac{\text{درجة الحموضة ١}}{\text{درجة الحموضة ٧}} = \frac{٠٫١}{٠٫٠٠٠٠٠٠١} = \frac{١٠^{-١}}{١٠^{-٧}} = ١٠^{-١-(-٧)} = ١٠^{٦} = \text{١ مليون.}$$



دعم الطلبة

سيحل الطلبة في هذا الدرس بشكل أساسي مسائل، وسيجيبون عن أسئلة باستخدام آلاتهم الحاسبة. تأكد من حصولهم على قدر كبير من التدريب عند استخدام مفاتيح لـو، ١٠^{س}، ص^{س}، بالإضافة إلى تقريب القيم إلى عدد معيّن من المنازل العشرية أو الأرقام المعنوية.

اطلب إلى الطلبة خلال عرض الأمثلة المحلولة في هذا الدرس أن يتحققوا من كل خطوة في الحل باستخدام الحاسبة.

صُمّم السؤالان ١، ٢ الواردان في التمارين ٦-٢ لدعم ثقة الطلبة بأنفسهم من خلال الطلب إليهم التحويل بين الصيغتَين اللوغاريتمية والأسّية باستخدام الأساس ١٠ فقط.

تحدّي الطلبة

يمكن للطلبة محاولة حل الأسئلة من ٤ إلى ٦ في تمارين ٦-٢ في مجموعات ثنائية، لأن النقاشات المطلوبة حول الطرائق المستخدمة في الحل ستكون مفيدة لعملية الفهم لديهم. نأمل أن يرى الطلبة كيف يمكن الدمج بين مجموع أو فرق لوغاريتمَين متساويين، والتي ستتم مناقشتها في درس قوانين اللوغاريتمات. لا تشكل هذه الأسئلة دليلًا، ولكن قد يجد الطلبة أدلة على حقيقة أن لـو س ص = لـو س + لـو ص

وأن لـو $\frac{س}{ص}$ = لـو س − لـو ص

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

١) لأن القوة المطلوبة للحصول على ١٠ باستخدام الأساس ١٠ هي ١، أي $١٠^{١}$ = ١٠

٢) لأن القوة المطلوبة للحصول على ١ باستخدام الأساس ١٠ هي ٠، أي $١٠^{٠}$ = ١

٣) لأن القوة المطلوبة للحصول على $١٠^{س}$ باستخدام الأساس ١٠ هي س، أي $١٠^{س}$ = $١٠^{س}$

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٢

مصادر أخرى مفيدة

Power match
https://nrich.maths.org/6159

Mixing pH
https://nrich.maths.org/6167

Cricket ratings
https://nrich.maths.org/1385

٦–٣ قوانين اللوغاريتمات

المفردات

الأس: القوة، فمثلًا ٦^{٢} الأس هو ٣

ملاحظات للمعلِّمين

- يقدم الجزء الأول من هذا الدرس قوانين اللوغاريتمات الثلاثة: قانون الضرب، قانون القسمة، قانون القوة.
- يمكن للطلبة أن يستخدموا هذه القوانين عند حل المسائل ولا يحتاجون إلى برهانها.
- مع أنه لا يتوقع من الطلبة برهنة هذه القوانين، إلّا أنه عليك أن تشجعهم على متابعة البراهين التي تقدم في كتاب الطالب.
- أكد على أن الطلبة يجب أن يعرفوا هذه القوانين إذا أرادوا التقدم في ما تبقى من مواضيع في هذه الوحدة.

أفكار للتعليم

- يشكل استخدام أسئلة الصح أو الخطأ طريقة جيدة لتقييم ما إذا كان الطلبة يعرفون ويفهمون قوانين اللوغاريتمات.
- يمكن للطلبة العمل في مجموعات ثنائية، حيث يكتب أحدهم العبارات ويقرر الآخر ما إذا كانت العبارة صحيحة أم خطأ (ويشرح اختياره لأحد القوانين لتقرير ما إذا كانت صحيحة أم خطأ).
- يمكنك أيضًا أن تطلب إلى الطلبة استخدام قوانين اللوغاريتمات لكتابة لوغاريتم معيّن بأكبر عدد ممكن من الطرائق المختلفة. على سبيل المثال، "ما عدد الطرائق المختلفة التي يمكننا بها التعبير عن لــو ٦٤؟" (الإجابات: لــو ١٦ + لــو٤ ، لــو٢ + لــو٣٢، ٢لــو٨، ٣لــو٤، ٦لــو٢، لــو ١٢٨ – لــو٢، وهكذا). الأمر الذي سيسمح لهم بشكل مفيد بتطبيق ما يعرفونه عن العوامل والأسس.

دعم الطلبة

- اشرح بعض أمثلة الدرس للطلبة، لتتأكد من أنهم يرون كيف تمّت عملية تطبيق كل القوانين خلال الحل.
- السؤالان ١، ٢ الواردان في التمارين ٦–٣ متشابهان في الشكل مع الأمثلة الواردة في الدرس، وبالتالي يوفران المساعدة في بناء ثقة الطلبة بأنفسهم من خلال التدريب.

تحدّي الطلبة

تتطلب الأسئلة ٥ إلى ٧ استخدامًا مكثفًا لقوانين اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية ومعالجة العبارات اللوغاريتمية جبريًا.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٣

١) زياد على حق.

٣٢ = ٢^{٥}، ٨ = ٢^{٣} ∴ لــو$_{٢}$ ٣٢ + لــو$_{٢}$ ٨ = ٥ + ٣ = ٨

٢٥٦ = ٢^{٨} ∴ لــو$_{٢}$ ٢٥٦ = ٨

٢) يمكن تبسيط لــو$_{٢}$ ٣٢ – لــو$_{٢}$ ٨ إلى لــو$_{٢}$ (٣٢ ÷ ٨) = لــو$_{٢}$ ٤ = ٢

٣) نعم، يمكن استخدام هذه الطريقة لتبسيط اللوغاريتم ذي الأساس ٢ للوغاريتمات لأي أساس.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦–٣

مصادر أخرى مفيدة

Proving the laws of logarithms
https://nrich.maths.org/11309

و

Logs by the fire
https://nrich.maths.org/11327

٦-٤ حل المعادلات اللوغاريتمية

المفردات

معادلة لوغاريتمية: معادلة تحتوي على مصطلح لوغاريتمي توجد فيه قيمة مجهولة يمكن إيجادها، مثل

$لـو_{س}\ ٦ = ٣$، $لـو_{٢}\ س = ١,٥$ أو $لـو\ ٣^{س} = ٢$

ملاحظات للمعلِّمين

نتقدم في هذا الدرس نحو حل معادلات لوغاريتمية أكثر تعقيدًا حيث تستخدم قوانين اللوغاريتمات إلى جانب التحويلات بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية. من الممكن أن يبدأ بعض الطلبة هنا بالإحساس بأن متطلبات الموضوع تشكل تحديًا، لأنه يطلب إليهم تطبيق كل ما تعلموه في الجبر والأسّ واللوغاريتم لحل مسألة واحدة.

أفكار للتعليم

يمكن تشجيع الطلبة المجيدين في الصف، على ألّا يقتصروا على كتابة خطوات الحل، بل أن يشرحوا هذه الخطوات عند حل أي سؤال تطرحه كمثال. شجعهم على شرح طريقة معرفتهم بصواب كل خطوة وأسباب أهميتها.

دعم الطلبة

صُمِّمت الأسئلة من ١ إلى ٤ الواردة في تمارين ٦-٤ للمساعدة في تعزيز ثقة الطلبة بأنفسهم.

تحدّي الطلبة

الأسئلة ٥ إلى ٦ الواردة في تمارين ٦-٤ أكثر تطلبًا للعمليات الجبرية للحصول على الحل.

عيّن للطلبة المجيدين في صفك بعض المهام الصعبة، على سبيل المثال اطلب إليهم كتابة الخطوات التفصيلية التي قد يتبعونها لحل معادلة صعبة مثل $٢لـو_{٢} \frac{٥}{\sqrt{س}} - لـو_{٢} \frac{١}{س} = س$، إطرح عليهم الأسئلة الآتية: هل يمكن حلها؟ إلى أي مدى يمكن تبسيط المعادلة حتى تحتاجوا إلى إدخال اللوغاريتم الاعتيادي؟ [يتم التبسيط إلى $٢^{س} = ٢٥$ قبل الحاجة إلى اللوغاريتم الاعتيادي].

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٤

٦-٥ حل المعادلات الأسّية باستخدام اللوغاريتمات

ملاحظات للمعلِّمين

- ندمج في هذا الدرس استخدام اللوغاريتم ذي الأساس ١٠، والتحويل بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية، وقوانين اللوغاريتمات لحل معادلات أسّية أكثر تعقيدًا.
- استخدم شريحة العرض الإلكتروني ٦-٢ لشرح عملية الحل من خلال حل المعادلة الأسّية $٢ \times ١١^{٢س+٣} = ٤^{٥}$. تمّ شرح كل الخطوات اللازمة في العرض (التبسيط، أخذ اللوغاريتم ذي الأساس ١٠ للجهتَين، تطبيق قانون القوة). كما يوجد سؤال في نهاية العرض يتيح للطلبة التمرن على ما تعلموه من شريحة العرض.
- مع أنه من الممكن أن يكون الطلبة قد سمعوا عن التطبيقات الواقعية للأسس واللوغاريتمات، إلّا أنهم أصبحوا في موقع يسمح لهم بتطبيق ما تعلموه لحل المسائل حول الأسس واللوغاريتمات التي تحدث في الحياة الواقعية من حولهم.

أفكار للتعليم

قد تكون فكرة معقولة أن تقدم هذا الدرس من خلال استخدام مجموعة من العبارات الأسّية، من قبيل $٣^{ن}$ أو ٣×٢^{ن} على أنهما الحدان ن لمتتاليات عددية.

عندما يصبح الطلبة قادرين على استخدامها لكتابة بعض الحدود الأولى، يمكنك عندئذ أن تعطيهم متتالية عددية من قبيل $\frac{١}{٢}$، ٢، ٨، ٣٢، ١٢٨... وتطلب إليهم إيجاد صيغة للحد ن لكل متتالية، حيث تكون بالصورة $أ \times ب^{ن}$، مؤكدًا على أن أ، ب ثابتان وأن الذي يتغير فقط هو ن.

دعم الطلبة

غالبًا ما تكون عملية حل المعادلة الأسية طويلة وقد يكون إثباتها أمرًا مشوقًا لبعض الطلبة، لذا شجعهم بوضع الكثير من الأسئلة التي يمكن من خلالها حل المعادلات في ما لا يزيد عن ثلاث خطوات. السؤال الذي يمكنك استخدامه قد يكون مشابهًا في البنية لـ $٤^{س} = ١٠$، $٣^{س} = ١٠٠$، $٧^{س} = ١٠٠٠$، **لـو** ١٠٠س $= ٥$، **لـو** $\frac{س}{١٠٠٠٠} = -١$، وهكذا.

تحدّي الطلبة

سيتمرن الطلبة من خلال الأسئلة ٤ إلى ٧ الواردة في تمارين ٦-٥ ويختبرون قدرتهم على وصف الحالات الواقعية بطريقة جبرية وعلى تطبيق ما تعلموه في هذه الوحدة لحل المسائل.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٦-٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

مصادر أخرى مفيدة

تتوفر على موقع (Desmos) تمثيلات بيانية تتضمن الدوال الأسية بما فيها نمذجة الأفكار

https://teacher.desmos.com/collection/5da6462c8b305273be677729?collections=featured-collections"Desmos Classroom Activities

Equation Attack HYPERLINK "https://nrich.maths.org/5644"Equation Attack (maths.org)

Log Attack https://nrich.maths.org/5831

الوحدة السادسة

الأسس واللوغاريتمات

العرض التوضيحي الإلكتروني ٦-١

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

التحويل ما بين

الصيغة الأسيّة

و

الصيغة اللوغاريتميّة

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

يمكن كتابة القيمة ٨١ على الشكل

$$٨١ = ٣^{٤}$$

استخدمنا

الأساس ٣

و **الأس ٤**

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

يمكن التعبير عن هذه العبارة أيضًا بطريقة أخرى باستخدام اللوغاريتم:

$$\text{لـو}_{٣}\ ٨١ = ٤$$

أي أن

$$٨١ = ٣^{٤}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ هي الصيغة اللوغاريتمية

٨١ = ٣^{٤} هي الصيغة الأسّية

من خلال النموذجَين أعلاه نستنتج ما يلي:

يمكننا كتابة **القيمة** ٨١ باستخدام

الأساس ٣ و **الأسّ** ٤

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

كيف نكتب

٣٢ = ٢^{٥}

بالصيغة اللوغاريتمية؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

بالصيغة اللوغاريتمية نكتب

$٣٢ = ٢^{٥}$

على الشكل

$\text{لـو}_{٢}\ ٣٢ = ٥$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

كيف نكتب

$\text{لـو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣$

بالصيغة الأسّية؟

بالصيغة الأسّية نكتب

لـو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣

على الشكل

١٢٥ = ٥^{٣}

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

للتحويل بين الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية نتبع القاعدة الآتية:

إذا كانت ص = أ^{س}

∴ لـو$_{أ}$ ص = س

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

إليك بعض التمارين لتتدرب عليها :

١ . اكتب كلاً ممّا يأتي بالصيغة الأسّية:

أ) لـــو$_{٤}$ ٦٤ = ٣

ب) لـــو$_{٢}$ ٢٥٦ = ٨

ج) لـــو$_{٣}$ ٧٢٩ = ٦

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الإجابة عن السؤال ١:

أ) ٦٤ = $٤^{٣}$

ب) ٢٥٦ = $٢^{٨}$

ج) ٧٢٩ = $٣^{٦}$

٢ . اكتب كلاً ممّا يأتي بالصيغة اللوغاريتمية:

أ) $٢٥ = ٥^{٢}$

ب) $٤ = ٨^{\frac{٢}{٣}}$

ج) $٣ = ٨١^{\frac{١}{٤}}$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

إجابات السؤال ٢:

أ) $\text{لو}_{٥}\ ٢٥ = ٢$

ب) $\text{لو}_{٨}\ ٤ = \frac{٢}{٣}$

ج) $\text{لو}_{٨١}\ ٣ = \frac{١}{٤}$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الوحدة السادسة

الأسس واللوغاريتمات

العرض التوضيحي الإلكتروني ٦ – ٢

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حل المعادلات الأسّية

باستخدام اللوغاريتم الاعتيادي

حل المعادلة $٢ \times ١١^{٢س+٣} = ٤^{٥}$

مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الخطوة الأولى في حل معادلة أسّية مثل

$$٢ \times ١١^{٢س+٣} = ٤^{٥}$$

هو تبسيطها قدر الإمكان.

كيف يمكننا تبسيط هذه المعادلة؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

نحن نعرف أن:

$٤^{٥} = ١٠٢٤$

يمكن تقسيم الطرفين على ٢

ما هي مراحل تبسيط المعادلة؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

نبسط في خطوتَين:

$٢ \times ١١^{٢س+٣} = ٤^{٥}$ ... استبدل $٤^{٥}$ بـ ١٠٢٤

$٢ \times ١١^{٢س+٣} = ١٠٢٤$ ... اقسم الطرفَين على ٢

$١١^{٢س+٣} = ٥١٢$

تمّ تبسيط المعادلة الأصلية إلى

$$١١^{٢س+٣} = ٥١٢$$

أيّ نوع من الصيغ يسمح لنا

بإسقاط الأسّ وكتابة المعادلة بدلالته؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الصيغة اللوغاريتمية هي التي تسمح لنا

بإسقاط الأس وكتابة المعادلة بدلالته.

إذا أخذنا لوغاريتم كلا الطرفَين،

فأيّ أساس يجب أن نستخدم؟ ولماذا؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

يجب أن نستخدم اللوغاريتم الاعتيادي

لأن اللوغاريتم الاعتيادي

لأي عدد يمكن إيجاده على الحاسبة.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

نأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لطرفي المعادلة:

$$\text{لـو}\ ١١^{٢س+٣} = \text{لـو}\ ٢٥١٢$$

ماذا يسمح لنا قانون القوة في اللوغاريتمات أن

نفعل بعد ذلك؟

يسمح لنا قانون القوة بإسقاط الأسّ:

$$\text{لـو}١١^{٢س+٣} = \text{لـو}٥١٢$$

$$(٢س + ٣)\ \text{لـو}١١ = \text{لـو}٥١٢$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

نريد أن نحل المعادلة لإيجاد س، لذا نريد

أن نكتبها بدلالة س.

ما الخطوات الثلاث التي نحتاج إليها؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الخطوة ١:

اقسم الطرفَين على لـو١١:

$$\text{٢س} + ٣ = \frac{\text{لـو}٥١٢}{\text{لـو}١١}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الخطوة ٢:

اطرح ٣ من الطرفَين

$$\text{٢س} = \frac{\text{لـو}\ ٥١٢}{\text{لـو}\ ١١} - ٣$$

الخطوة ٣:

اقسم الطرفَين على ٢

$$س = \frac{١}{٢}\left(\frac{لـــو ٥١٢}{لـــو ١١} - ٣\right)$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الخطوة الأخيرة هي إيجاد قيمة س وتقريب الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

$$س = \frac{١}{٢}\left(\frac{لـــو ٥١٢}{لـــو ١١} - ٣\right)$$

س = –١٩٩, ٠

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

- يمكنك الآن التدرّب على ما تعلمته عبر حلّ معادلة أسّية أخرى.
- حل هذا السؤال يأتي في ٧ خطوات على الشرائح الموجودة بعد السؤال.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

تمرين

أوجِد قيم س التي تحقق المعادلة الآتية مقرّبًا الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

$$٥ \times ٧^{١-٢س} = ١٠^{-٢}$$

حل التمرين

الخطوة ١ و ٢ : اكتب $١٠^{-٢}$ في صورته العادية واقسم طرفي المعادلة على ٥:

$$٥ \times ٧^{١-٢س} = ١٠^{-٢}$$

$$٥ \times ٧^{١-٢س} = ٠,٠١$$

$$٧^{١-٢س} = ٠,٠٠٢$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حل التمرين

الخطوة ٣: خذ اللوغاريتم الاعتيادي للطرفَين

$$٧^{١-٢س} = ٠,٠٠٢$$

$$\text{لـو } ٧^{١-٢س} = \text{لـو } ٠,٠٠٢$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حل التمرين

الخطوة ٤ : باستخدام قانون القوة:

$$\text{لـو } ٧^{١-٢\text{س}} = \text{لـو } ٠,٠٠٢$$

$$(١-٢\text{س})\text{لـو}٧ = \text{لـو } ٠,٠٠٢$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حل التمرين

الخطوة ٥ : اقسم طرفيْ المعادلة على لـو٧:

$$(١-٢\text{س})\text{لـو}٧ = \text{لـو } ٠,٠٠٢$$

$$١ - ٢\text{س} = \frac{\text{لـو } ٠,٠٠٢}{\text{لـو}٧}$$

حل التمرين

الخطوة ٦: أعد ترتيب المعادلة لإيجاد قيمة س:

$$١ - ٢س = \frac{\text{لـو } ٠,٠٠٢}{\text{لـو } ٧}$$

$$٢س = ١ - \frac{\text{لـو } ٠,٠٠٢}{\text{لـو } ٧}$$

$$س = \frac{١}{٢}\left(١ - \frac{\text{لـو } ٠,٠٠٢}{\text{لـو } ٧}\right)$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حل التمرين

الخطوة ٧: أوجِد قيمة س وأعطِ الإجابة مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

$$س = \frac{١}{٢}\left(١ - \frac{\text{لـو } ٠,٠٠٢}{\text{لـو } ٧}\right)$$

$$س = ٢,٠٩٦٨....$$

$$س = ٢,١٠$$

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة السادسة: الأسس واللوغاريتمات

إجابات معرفة قبلية

١) أ $\frac{١}{٢٥}$ أو ٠,٠٤ ب ٤ ج ١

٢) س = ٥

٣) أ ٣س^{٣} ب ٤س^{٧} ج ٢

تمارين ٦-١

١) أ لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣ ب لو ١٠٠٠٠ = ٤

ج لو$_{٣}$ ٢١٨٧ = ٧ د لو$_{١٦}$ ٤ = $\frac{١}{٢}$

هـ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٣٢}$ = −٥ و لو$_{٨}$ ٤ = $\frac{٢}{٣}$

٢) أ ٧^{٢} = ٤٩ ب ١٠$^{-١}$ = ٠,١

ج ٢^{٦} = ٦٤ د ٢٧$^{\frac{١}{٣}}$ = ٣

هـ ٤^{١,٥} = ٨ و ٨$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٤}$

٣) أ صحيحة ب خطأ

ج صحيحة د صحيحة

هـ خطأ و خطأ

ز صحيحة ح صحيحة

ط صحيحة ي خطأ

ك صحيحة ل صحيحة

٤) أ ٣ ب ٢

ج −١ د $\frac{١}{٢}$

هـ −٣ و −$\frac{١}{٣}$

٥)

الصيغة الأسّية	٢^{٤} = ١٦	١٠^{٣} = ١٠٠٠	٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$	٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ٣	$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣}$ = $\frac{٢٧}{٨}$
الصيغة اللوغاريتمية	لو$_{٢}$ ١٦ = ٤	لو ١٠٠٠ = ٣	لو$_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ = −٢	لو$_{٩}$ ٣ = $\frac{١}{٢}$	لو$_{\frac{٢}{٣}}$ $\frac{٢٧}{٨}$ = −٣

٦) ٦,٩٦٦

٧) ٢,٠٩٦

تمارين ٦-٢

١) أ لو ١٠٠ = ٢ ب لو ٢٠٠ = س

ج لو ق = ل د لو ت = −ز

٢) أ لو ٥٢ = س، س = ١,٧١٦

ب لو ٥٢٠ = س، س = ٢,٧١٦

ج لو ٤ = س، س = ٠,٦٠٢

د لو ٤٠٠٠٠٠ = س، س = ٥,٦٠٢

هـ لو ١٢٣٤ = س، س = ٣,٠٩١

و لو ١٢,٣٤ = س، س = ١,٠٩١

ز لو ٦٠٠٠٠٠٠ = س، س = ٦,٧٧٨

ح لو ٠,٦ = س، س = −٠,٢٢٢

٣) أ س = ٩٩ ب س = ١١١١

ج س = ٧ د س = ١٤

هـ س = −٨ و س = ٢٥

ز س = ٠,٠٢ ح س = ٤٠٢

٤) أ لو ٣٠ ≈ ١,٤٧٧

لو ١٠ + لو ٣ ≈ ١ + ٠,٤٧٧ = ١,٤٧٧

ب لو $\frac{١٠}{٣}$ ≈ ٠,٥٢٣

لو ١٠ − لو ٣ ≈ ١ − ٠,٤٧٧ = ٠,٥٢٣

٥) أ لو ٧٠٠، لو ١٠٠ + لو ٧ كلاهما يساوي تقريبًا ٢,٨٤٥

ب لو $\frac{١٠٠}{٧}$، لو ١٠٠ − لو ٧ كلاهما يساوي تقريبًا ١,١٥٥

٦) أ لو ٢٠٠٠، لو ١٠٠٠ + لو ٢ كلاهما يساوي تقريبًا ٣,٣٠١

ب لو ٥٠٠، لو ١٠٠٠ − لو ٢ كلاهما يساوي تقريبًا ٢,٦٩٩

تمارين ٦-٣

١) أ لو$_{٢}$ ٨١٠ ب لو$_{٣}$ ١,٥

ج لو$_{٥}$ ١٦,٢ د لو$_{٧}$ $\frac{٤}{٣}$

هـ لو$_{٦}$ ٢٤٣ و لو$_{٤}$ ٣٦

٢) أ ٤ ب ٣
ج $\frac{٣}{٢}$ د -٥
هـ ٢ و $-\frac{٣}{٤}$

٣) $-\frac{٣}{٢}$

٤) أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{٧}{٤}$
ج -٣ د $-\frac{٤}{٣}$

٥) أ $٥^{ص}$ ب ١ + ص ج ١ − ص

٦) أ س + ص ب ٢س + ٣ص
ج $\frac{١}{٢}$ س − ٢ص

٧) أ $١٠^{٩}$ ب $١٠^{٥,٦٤ - ٣,٣٦} = ١٠^{٢,٢٨}$
ج $١٠^{\frac{١}{٢} \times ٥,٦٤} = ١٠^{٢,٨٢}$ د $١٠^{\frac{١}{٣} \times ٣,٣٦} = ١٠^{١,١٢}$

تمارين ٦-٤

١) أ س = ٨ ب س = ٢٧
ج س = $\frac{١}{١٢٥}$ د س = ٨

٢) أ س = ٠ ب س = ٢١
ج س = ١٣ د س = ١٥
هـ س = ١٤ و س = -٤٠
ز س = -٦ ح س = ٧
ط س = ٣ ي س = ٧٢
ك س = ٤ ل س = $-\frac{٥}{٢}$

٣) أ س = ٦ ب س = ١١٥٢
ج س = $\frac{١}{٤}$ د س = ١,٦
هـ س = ١,٢ و س = ١٠
ز س = ٢٥ ح س = ٢٢,٥

٤) أ س = ٤ ب س = ٤٩
ج س = ٥ د س = $\frac{٤}{٣}$
هـ ١٤ و س = $\frac{٩}{١١}$
ز س = $-\frac{١}{٤}$ ح س = $\frac{٤}{٥}$

٥) أ س = ٧ ب س = ٩
ج س = ٥٤

٦) س = ٣

تمارين ٦-٥

١) أ س = ١,٨٦ ب س = ٥,١٣
ج س = ١,٨٩ د س = ٥,٧٨
هـ س = $-١,٨٧$ و س = ٠,٩٤٩
ز س = $-٠,٤٦٥$ ح س = ١,٣٨
ط س = ٤,٣٤ ي س = ٠,٥٤٨
ك س = ٦,١٨ ل س = ٣,١١

٢) أ $٨ \times ٢^{س} + ٤ \times ٢^{س+١} = ٢^{٣} \times ٢^{س} + ٢^{٢} \times ٢^{س+١}$
$= ٢^{س+٣} + ٢^{س+٣}$
$= ٢ \times ٢^{س+٣}$

ب س = ٥,٣٨

٣) س = ١,٩٧

٤) أ ٣٤٩ غ
ب ٦,٥٨ سنوات

٥) أ ٤٣٦ م/ثانية ب ٥,٦٪
ج ٢٨ ثانية
د لأن كتلة الصاروخ تتناقص مع احتراق الوقود.

٦) أ ٤٦٣٧ ريال عُماني
ب ٢٤ شهرًا

٧) أ ١٢٢٨٨
ب ١٣ أسبوعًا

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ س = لــو$_{\text{٥}}$ ٢٠ ب ١٣$^{\text{ص}}$ = ١٠٠

٢) أ ٢,٨٩ ب ٠,٥١

ج – ٠,٥١ د ٢,٣٨

هـ ٢,٧٠ و ٠,١٩

٣) أ س = ٦٢٥ ب س = $-\frac{\text{١٧}}{\text{٢}}$

٤) أ س = ١,٧٠ ب س = ١,٦٦

٥) أ $\left(\frac{\text{١}}{\text{٢٧}} \times \text{٣}^{\text{س}-\text{١}}\right) \div (\text{٩} \times \text{٣}^{\text{٤}-\text{س}})$

$= (\text{٣}^{-\text{٣}} \times \text{٣}^{\text{س}-\text{١}}) \div (\text{٣}^{\text{٢}} \times \text{٣}^{\text{٤}-\text{س}})$

$= \text{٣}^{\text{س}-\text{٤}} \div \text{٣}^{\text{٦}-\text{س}}$

$= \text{٣}^{\text{س}-\text{٤}-(\text{٦}-\text{س})}$

$= \text{٣}^{\text{٢س}-\text{١٠}}$

ب س = ٧,١٠

٦) أ أ = ٢٤٠، ب = ٠,٩٦

ب ١٦٠ كم/ساعة

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة السادسة: الأسس واللوغاريتمات

تمارين ٦-١

١) فقط ج صحيحة.

٢) أ لــو$_{\text{٧}}$ ٤٩ = ٢

ب لــو$_{\text{٨}}$ ٢ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

ج لــو$_{\frac{\text{١}}{\text{١٢٥}}}$ ٢٥ = $-\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

٣) أ $\text{٣}^{-\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٩}}$

ب $\text{٠,٥}^{-\text{٣}} = \text{٨}$

ج $\text{٢٧}^{-\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} = \frac{\text{١}}{\text{٩}}$

٤) أ ٥ ب ٤

ج –٢ د $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

٥) أ –١١ ب $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

ج –٥ د $-\frac{\text{١١}}{\text{٦}}$

٦) ٤,٣٦٦

٧) ٢,٠٤٧٨

تمارين ٦-٢

١) أ لــو ٠,٠١ = –٢ ب س = لــو ٤٠٠

ج لــو ٣ق = ٢ل د لــو ن = ٥ – م

٢) أ س = لــو ٥٤، س = ١,٧٣٢

ب س = لــو ٦٠٩، س = ٢,٧٨٥

ج س = لــو ١٥، س = ١,١٧٦

د س = لــو ٠,٨٦٤، س = –٠,٦٣٥

هـ س = لــو ٩٨,٧، س = ١,٩٩٤

و س = لــو ٠,٠٩٨٧، س = –١,٠٠٥٧

ز س = لــو ٣٠٠٠٣٣٣، س = ٦,٤٧٧٢

ح س = لــو ٠,٠٠٦، س = –٢,٢٢٢

٣) أ $١٠^{٢}$ = س − ١؛ س = ١٠١

ب $١٠^{٢}$ = س + ٣٣؛ س = ٦٧

ج $١٠^{٢}$ = ٢س − ٤؛ س = ٥٢

د $١٠^{٢,٥}$ = ٩س + ٢؛ س = ٣٤,٩١

هـ $١٠^{١} = \frac{٢س - ٦}{س}$؛ س = −٠,٧٥

و $١٠^{١,٦}$ = ٠,٣س؛ س = ١٣٢,٧

ز $١٠^{١,٥}$ = ٢٠ − س؛ س = −١١,٦٢

ح $١٠^{-٢} = \frac{٥س}{١٢} - ٣$؛ س = ٧,٢٢

٤) لو ٤٩ ≈ ١,٦٩، لو ٧ ≈ ٠,٨٥

∴ ٢ لو ٧ ≈ ٢ × ٠,٨٥ = ١,٦٩

لو ٤٩ = ٢ لو ٧

تمارين ٦-٣

١) أ $لو_{٢}$ ١٩٢ ب $لو_{٥}$ ٣,٣٧٥

ج $لو_{٧}$ ٨ د ٣ $لو_{٦}$ ١٠

هـ $لو_{٤}$ ٠,٠٨ و $لو_{٩}$ ٠,٧٥

٢) أ ١,٥ ب ٠,٦

ج −١,٥ د −٠,٥

٣) $ص = \frac{٣س - ٢}{٢ - س}$

٤) ٣ − ٢ص

٥) أ $١٠^{٠,٤}$ ب $١٠^{-٠,٢}$

ج $١٠^{٠,٢}$ د $١٠^{٠,٩}$

تمارين ٦-٤

١) أ $س = ٣^{\frac{١}{٩}} = ١,١٣$ ب س = ٤

ج $س = \frac{١}{١٦} = ٠,٠٦$ د $س = \frac{١}{٠,١٦} = ٦,٢٥$

٢) أ س = ٢ ب س = ٧

ج س = ٢٨ د س = ١١

هـ س = ٦ و س = −٢١

ز س = ٧ ح س = ١٣

ط س = ٣,٥ ي س = ٧

٣) أ س = ٣ ب س = ١٨

ج س = ٦ د س = ٤

هـ س = ٠,٧٥ و س = ١٥

٤) أ $س = \frac{٥}{٦}$ ب س = ٧٣,٥

ج س = ١,٦٢٥ د $س = \frac{١}{٢١}$

هـ س = ٢٥ و $س = \frac{٣}{١٠}$

ز س = ٧,٥

٥) أ س = ١٧ ب $س = \frac{١}{٤}$

ج س = ١٨

٦) $س = \frac{٤٨}{٣١}$

تمارين ٦-٥

١) أ س = ٣,١٠ ب س = ٢,٧٢
ج س = ٢,٨٩ د س = ٥,٢٩
هـ س = ١,٦٢ و س = ٠,٨٣٢
ز س = ٦,٦٠ ح س = – ١,٧٧
ط س = ٠,٠٩٣٢ ي س = ٤,٢٩
ك س = ١,٤٦ ل س = – $\frac{٧}{١٩}$

٢) أ تتزايد بنسبة ١٢٪ ب ٧٨٧٠٠٠
ج ٦,١٢ سنوات

٣) أ ١٠٠ ريال عُماني ب ٢٣ شهرًا

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ لـو$_{٤}$ ٩٩ = ٢س ب ص^{٤} = س

٢) أ ٣,٤٢٧ ب ٠,٨٣٧
ج ٢,٥٩٠ د ٠,٥٣٣

٣) أ س = ٠,٠٠١٦٤ ب س = – $\frac{٤}{٩}$

٤) أ س = ١,٩٢ ب س = ١,١١

٥) س = ٢,٩٦

٦) أ أ = ٢٠٠، ب = ٠,٩٥
ب ١٢٦ كم/ساعة
ج ٢٠ ثانية

الوحدة السادسة: حلول تمارين كتاب الطالب

الأسس واللوغاريتمات

تمارين ٦-١

١)

أ الأساس = ٤، الأسّ = ٣ ، القيمة = ٦٤ $\therefore$ لـو$_{٤}$ ٦٤ = ٣

ب الأساس = ١٠، الأسّ = ٤ ، القيمة = ١٠٠٠٠ $\therefore$ لـو ١٠٠٠٠ = ٤

ج الأساس = ٣، الأسّ = ٧ ، القيمة = ٢١٨٧ $\therefore$ لـو$_{٣}$ ٢١٨٧ = ٧

د الأساس = ١٦، الأسّ = $\frac{١}{٢}$ ، القيمة = ٤ $\therefore$ لـو$_{١٦}$ ٤ = $\frac{١}{٢}$

هـ الأساس = ٢، الأسّ = −٥ ، القيمة = $\frac{١}{٣٢}$ $\therefore$ لـو$_{٢}$ $\frac{١}{٣٢}$ = −٥

و الأساس = ٨، الأسّ = $\frac{٢}{٣}$ ، القيمة = ٤ $\therefore$ لـو$_{٨}$ ٤ = $\frac{٢}{٣}$

٢)

أ الأساس = ٧، الأسّ = ٢ ، القيمة = ٤٩ $\therefore$ $٧^{٢} = ٤٩$

ب الأساس = ١٠، الأسّ = −١، القيمة = ٠,١ $\therefore$ $١٠^{-١} = ٠,١$

ج الأساس = ٢، الأسّ = ٦ ، القيمة = ٦٤ $\therefore$ $٢^{٦} = ٦٤$

د الأساس = ٢٧، الأسّ = $\frac{١}{٣}$ ، القيمة = ٣ $\therefore$ $٢٧^{\frac{١}{٣}} = ٣$

هـ الأساس = ٤، الأسّ = ١,٥ ، القيمة = ٨ $\therefore$ $٤^{١.٥} = ٨$

و الأساس = ٨، الأسّ = −$\frac{٢}{٣}$ ، القيمة = $\frac{١}{٤}$ $\therefore$ $٨^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٤}$

٣)

أ $٤^{٢} = ١٦$ $\therefore$ لـو$_{٤}$ ١٦ = ٢ صحيحة

ب $٢^{١٠} \neq ٢٠$ $\therefore$ لـو$_{٢}$ ٢٠ = ١٠ خطأ

ج $٢^{٤} = ١٦$ $\therefore$ لـو$_{٢}$ ١٦ = ٤ صحيحة

د $٧^{٢} = ٤٩$ $\therefore$ لـو$_{٧}$ ٤٩ = ٢ صحيحة

هـ $١٦^{٢} \neq ٤$ $\therefore$ لـو$_{١٦}$ ٤ = ٢ خطأ

و $٦^{\frac{١}{٢}} \neq ٣٦$ $\therefore$ لـو$_{٦}$ ٣٦ = $\frac{١}{٢}$ خطأ

ز $١٢٥^{\frac{١}{٣}} = ٥$ $\therefore$ لـو$_{١٢٥}$ ٥ = $\frac{١}{٣}$ صحيحة

ح $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ $\therefore$ لـو $\frac{١}{١٠٠}$ = −٢ صحيحة

ط $٩^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ $\therefore$ لـو$_{٩}$ ٢٧ = $\frac{٣}{٢}$ صحيحة

ي $٦٤^{-\frac{٢}{٣}} \neq ١٦$ $\therefore$ لـو$_{٦٤}$ ١٦ = −$\frac{٢}{٣}$ خطأ

ك $٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$ $\therefore$ لـو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣ صحيحة

ل $٢^{-٢} = ٠,٢٥$ $\therefore$ لـو$_{٢}$ ٠,٢٥ = −٢ صحيحة

٤) أ القيمة هي ٣ لأن $٣^{٣} = ٢٧$

ب القيمة هي ٢ لأن $٥^{٢} = ٢٥$

ج القيمة هي −١ لأن $٧^{-١} = \frac{١}{٧}$

د القيمة هي $\frac{١}{٢}$ لأن $١٠٠^{\frac{١}{٢}} = ١٠$

هـ القيمة هي −٣ لأن $٠,٥^{-٣} = ٨$

و القيمة هي $-\frac{١}{٣}$ لأن $٨^{-\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٢}$

٥) العمود ١ الأساس = ٢، الأس = ٤، القيمة = ١٦،

$\therefore \text{لو}_{٢}\, ١٦ = ٤$

العمود ٢ الأساس = ١٠، الأس = ٣، القيمة = ١٠٠٠،

$\therefore ١٠^{٣} = ١٠٠٠$

العمود ٣ الأساس = ٣، الأس = −٢، القيمة = $\frac{١}{٩}$،

$\therefore \text{لو}_{٣}\, \frac{١}{٩} = -٢$

العمود ٤ الأساس = ٩، الأس = $\frac{١}{٢}$، القيمة = ٣،

$\therefore ٩^{\frac{١}{٢}} = ٣$

العمود ٥ الأساس = $\frac{٢}{٣}$، الأس = −٣، القيمة = $\frac{٢٧}{٨}$،

$\therefore \text{لو}_{\frac{٢}{٣}}\, \frac{٢٧}{٨} = -٣$

الصيغة الأسّية	$٢^{٤} = ١٦$	$١٠^{٣} = ١٠٠٠$	$٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$	$٩^{\frac{١}{٢}} = ٣$	$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣} = \frac{٢٧}{٨}$
الصيغة اللوغاريتمية	$\text{لـو}_{٢}\, ١٦ = ٤$	$\text{لـو}\, ١٠٠٠ = ٣$	$\text{لـو}_{٣}\, \frac{١}{٩} = -٢$	$\text{لـو}_{٩}\, ٣ = \frac{١}{٢}$	$\text{لـو}_{\frac{٢}{٣}}\, \frac{٢٧}{٨} = -٣$

٦) $١٢٥ = ٥^{٣} = (٢^{٢,٣٢٢})^{٣} = ٢^{٦,٩٦٦}$،

$\therefore \text{لـو}_{٢}\, ١٢٥ = ٦,٩٦٦$

٧) $١٠ = ١٠٠^{\frac{١}{٢}} = (٣^{٤,١٩٢})^{\frac{١}{٢}} = ٣^{٢,٠٩٦}$،

$\therefore \text{لـو}_{٣}\, ١٠ = ٢,٠٩٦$

تمارين ٦-٢

١) أ الأساس = ١٠، الأسّ = ٢، القيمة = ١٠٠ $\therefore$ لـو ١٠٠ = ٢

ب الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٢٠٠ $\therefore$ لـو ٢٠٠ = س

ج الأساس = ١٠، الأسّ = ل، القيمة = ق $\therefore$ لـو ق = ل

د الأساس = ١٠، الأسّ = − ز، القيمة = ت، $\therefore$ لـو ت = −ز

٢) أ الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٥٢ $\therefore$ س = لـو ٥٢، س = ١,٧١٦

ب الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٥٢٠ $\therefore$ س = لـو ٥٢٠، س = ٢,٧١٦

ج الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٤ $\therefore$ س = لـو ٤، س = ٠,٦٠٢

د الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٤٠٠٠٠٠ $\therefore$ س = لـو ٤٠٠٠٠٠، س = ٥,٦٠٢

هـ الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ١٢٣٤ $\therefore$ س = لـو ١٢٣٤، س = ٣,٠٩١

و الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ١٢,٣٤ $\therefore$ س = لـو ١٢,٣٤، س = ١,٠٩١

ز الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٦٠٠٠٠٠٠ $\therefore$ س = لـو ٦٠٠٠٠٠٠، س = ٦,٧٧٨

ح الأساس = ١٠، الأسّ = س، القيمة = ٠,٦ $\therefore$ س = لـو ٠,٦، س = −٠,٢٢٢

٣) أ $\text{س} + ١ = ١٠^{٢}$

$\text{س} = ١٠٠ - ١$

$= ٩٩$

ب $\text{س} - ١١١ = ١٠^{٣}$

$\text{س} = ١٠٠٠ + ١١١$

$\text{س} = ١١١١$

ج $٢\text{س} - ٤ = ١٠^{١}$

$\text{س} = \frac{١٠ + ٤}{٢}$

$= ٧$

د $٧\text{س} + ٢ = ١٠^{٢}$

$\text{س} = \frac{١٠٠ - ٢}{٧}$

$= ١٤$

هـ $\frac{٢\text{س} + ٨}{\text{س}} = ١٠^{٠}$

$٢\text{س} + ٨ = \text{س}$

$\text{س} = -٨$

و $٤٠٠\text{س} = ١٠^{٤}$

$\text{س} = \frac{١٠٠٠٠}{٤٠٠}$

$= ٢٥$

ز $٢٠\text{س} - ٠{,}٣ = ١٠^{-١}$

$\text{س} = \frac{٠{,}١ + ٠{,}٣}{٢٠}$

$= ٠{,}٠٢$

ح $\frac{\text{س}}{٢٠٠} - ٢ = ١٠^{-٢}$

$\text{س} = ٢٠٠(٢ + ٠{,}٠١)$

$= ٤٠٢$

٤) أ $\text{لـو } ٣٠ \approx ١{,}٤٧٧$

$\text{لـو } ١٠ + \text{لـو } ٣ \approx ١ + ٠{,}٤٧٧ = ١{,}٤٧٧$

ب $\text{لـو } \frac{١٠}{٣} \approx ٠{,}٥٢٣$

$\text{لـو } ١٠ - \text{لـو } ٣ \approx ١ - ٠{,}٤٧٧ = ٠{,}٥٢٣$

٥) أ $\text{لـو } ٧٠٠ \approx ٢{,}٨٤٥$

$\text{لـو } ١٠٠ + \text{لـو } ٧ \approx ٢ + ٠{,}٨٤٥ = ٢{,}٨٤٥$

ب $\text{لـو } \frac{١٠٠}{٧} \approx ١{,}١٥٥$

$\text{لـو } ١٠٠ - \text{لـو } ٧ \approx ٢ - ٠{,}٨٤٥ = ١{,}١٥٥$

٦) أ $\text{لـو } ٢٠٠٠ \approx ٣{,}٣٠١$

$\text{لـو } ١٠٠٠ + \text{لـو } ٢ \approx ٣ + ٠{,}٣٠١ = ٣{,}٣٠١$

ب $\text{لـو } ٥٠٠ = \text{لـو } \frac{١٠٠٠}{٢} \approx ٢{,}٦٩٩$

$\text{لـو } ١٠٠٠ - \text{لـو } ٢ \approx ٣ - ٠{,}٣٠١ = ٢{,}٦٩٩$

تمارين ٦-٣

١) أ $\text{لو}_{٢}(٩^{٢} \times ١٠) = \text{لو}_{٢}\, ٨١٠$

ب $\text{لو}_{٣}\left(\frac{٦^{٣}}{١٢^{٢}}\right) = \text{لو}_{٣}\, ١{,}٥$

ج $\text{لو}_{٥}\left(\frac{٣^{٤}}{٢٥^{\frac{١}{٢}}}\right) = \text{لو}_{٥}\, ١٦{,}٢$

د $\text{لو}_{٧}\left(\frac{١^{٣} \times ٢^{٢}}{٠{,}٥٩}\right) = \text{لو}_{٧}\, \frac{٤}{٣}$

هـ $\text{لو}_{٦}\, ٦ + ٢\text{لو}_{٦}\, ٩ - \frac{١}{٣}\text{لو}_{٦}\, ٨ = \left(\frac{٦ \times ٩^{٢}}{٨^{\frac{١}{٣}}}\right)$

$= \text{لو}_{٦}\, ٢٤٣$

و $٣\text{لو}_{٤}\, ٢ + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{٤}\, ٢٧ - \frac{١}{٢}$

$= ٣\text{لو}_{٤}\, ٢ + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{٤}\, ٢٧ - \text{لو}_{٤}\, ٢$

$= \text{لو}_{٤}\left(\frac{٢^{٣} \times ٢٧^{\frac{٢}{٣}}}{٢}\right)$

$= \text{لو}_{٤}\, ٣٦$

٢) أ $\text{لو}_{٢}\left(\frac{٨٠}{٥}\right) = \text{لو}_{٢}\, ١٦ = ٤$

ب $\text{لو}_{٣}\left(\frac{٥٤}{٤^{\frac{١}{٢}}}\right) = \text{لو}_{٣}\, ٢٧ = ٣$

ج $\text{لو}_{٤}\left(\frac{٤٠}{٥}\right) = \text{لو}_{٤}\, ٨ = \frac{٣}{٢}$

د $\text{لو}_{٢}\left(\frac{٣}{٩٦}\right) = \text{لو}_{٢}\left(\frac{١}{٣٢}\right) = -٥$

هـ $\text{لو}_{٦}\, ١٨ + \text{لو}_{٦}\, ١٢ - \text{لو}_{١١}\, ١١$

$= \text{لو}_{٦}(١٨ \times ١٢) - ١$

$= -١ + \text{لو}_{٦}\, ٢١٦$

$= -١ + ٣$

$= ٢$

و $\text{لو}_{١٦}\left(\frac{٢٠ \times \frac{١}{٥}}{٢^{٥}}\right) = \text{لو}_{١٦}\, \frac{١}{٨} = -\frac{٣}{٤}$

٣) $\frac{\text{لو}_{٥}\, ٨}{\text{لو}_{٥}\, ٠{,}٢٥} = \frac{\text{لو}_{٥}\, ٢^{٣}}{\text{لو}_{٥}\, ٢^{-٢}} = \frac{٣\text{لو}_{٥}\, ٢}{-٢\text{لو}_{٥}\, ٢} = -\frac{٣}{٢}$

٤) أ $\frac{\text{لو}_{٣}\, ٣^{٢}}{\text{لو}_{٣}\, ٣^{٣}} = \frac{٢\text{لو}_{٣}\, ٣}{٣\text{لو}_{٣}\, ٣} = \frac{٢}{٣}$

ب $\frac{\text{لو}_{٣}\, ٢^{٧}}{\text{لو}_{٣}\, ٢^{٤}} = \frac{٧\text{لو}_{٣}\, ٢}{٤\text{لو}_{٣}\, ٢} = \frac{٧}{٤}$

ج $\frac{\text{لو}_{٤}\, ٤^{-٣}}{\text{لو}_{٤}\, ٤^{١}} = \frac{-٣\text{لو}_{٤}\, ٤}{\text{لو}_{٤}\, ٤} = -٣$

د $\frac{\text{لو}_{٢}\, ٢^{-٤}}{\text{لو}_{٢}\, ٢^{٣}} = \frac{-٤\text{لو}_{٢}\, ٢}{٣\text{لو}_{٢}\, ٢} = -\frac{٤}{٣}$

٥) أ الأساس = ٥، الأسّ = ص، القيمة = س

$\therefore$ س = $٥^{\text{ص}}$

ب $\text{لو}_{٥}\, ٥\text{س} = \text{لو}_{٥}\, ٥ + \text{لو}_{٥}\, \text{س} = ١ + \text{ص}$

ج $\text{لو}_{٥}\, \frac{٥}{\text{س}} = \text{لو}_{٥}\, ٥ - \text{لو}_{٥}\, \text{س} = ١ - \text{ص}$

٦) أ $\text{لو}_{٢}\, \text{أ ب} = \text{لو}_{٢}\, ٢^{\text{س}+\text{ص}} = \text{س} + \text{ص}$

ب $\text{لو}_{٢}\, \text{أ}^{٢} + \text{لو}_{٢}\, \text{ب}^{٣} = \text{لو}_{٢}\, (٢^{\text{س}})^{٢} + \text{لو}_{٢}\, (٢^{\text{ص}})^{٣}$

$= \text{لو}_{٢}\, ٢^{٢\text{س}} + \text{لو}_{٢}\, ٢^{٣\text{ص}}$

$= \text{لو}_{٢}\, (٢^{٢\text{س}} \times ٢^{٣\text{ص}})$

$= \text{لو}_{٢}\, ٢^{٢\text{س}+٣\text{ص}}$

$= ٢\text{س} + ٣\text{ص}$

ج) $\text{لـو}_{٢}\sqrt{\text{أ}} - \text{لـو}_{٢}\,\text{ب}^{٢} = \text{لـو}_{٢}\dfrac{\sqrt{٢^{\text{س}}}}{(٢^{\text{ص}})^{٢}}$

$= \text{لـو}_{٢}\dfrac{٢^{\frac{١}{٢}\text{س}}}{٢^{٢\text{ص}}}$

$= \text{لـو}_{٢}\,٢^{\frac{١}{٢}\text{س}-٢\text{ص}}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} - ٢\text{ص}$

٧) أ) $٤٣٦٥١٦ \times ٢٢٩١ = ١٠^{٥,٦٤} \times ١٠^{٣,٣٦} = ١٠^{٩}$

ب) $٤٣٦٥١٦ \div ٢٢٩١ = ١٠^{٥,٦٤} \div ١٠^{٣,٣٦} = ١٠^{٢,٢٨}$

ج) $\sqrt{٤٣٦٥١٦} = ١٠^{\frac{١}{٢}\times ٥,٦٤} = ١٠^{٢,٨٢}$

د) $\sqrt[٣]{٢٢٩١} = ١٠^{\frac{١}{٣}\times ٣,٣٦} = ١٠^{١,١٢}$

تمارين ٦-٤

١) أ) $\text{لـو}_{٢}\,\text{س} = ٣$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٢^{٣} = \text{س}$

$\text{س} = ٨$

ب) $\text{لـو}_{٩}\,\text{س} = \frac{٣}{٢}$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٩^{\frac{٣}{٢}} = \text{س}$

$\text{س} = (\sqrt{٩})^{٣}$

$\text{س} = ٢٧$

ج) $\text{لـو}_{٥}\,\text{س} = -٣$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٥^{-٣} = \text{س}$

$\text{س} = \frac{١}{٥^{٣}}$

$\text{س} = \frac{١}{١٢٥}$ أو ٠,٠٠٨

د) $\text{لـو}_{٠,١٢٥}\,\text{س} = -١$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$\text{س} = ٠,١٢٥^{-١}$

$\text{س} = \frac{١}{٠,١٢٥}$

$\text{س} = ٨$

٢) أ) $\text{لـو}_{٧}(\text{س} + ١) = ٠$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٧^{٠} = \text{س} + ١$

$١ = \text{س} + ١$

$\text{س} = ٠$

ب) $\text{لـو}_{٤}(\text{س} - ٥) = ٢$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٤^{٢} = \text{س} - ٥$

$١٦ = \text{س} - ٥$

$\text{س} = ٢١$

ج) $\text{لـو}_{٢}(\text{س} + ٣) = ٤$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٢^{٤} = \text{س} + ٣$

$١٦ = \text{س} + ٣$

$\text{س} = ١٣$

د) $\text{لـو}_{٣}(٢\text{س} - ٣) = ٣$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٣^{٣} = ٢\text{س} - ٣$

$٢٧ = ٢\text{س} - ٣$

$\text{س} = \frac{٢٧ + ٣}{٢}$

$\text{س} = ١٥$

هـ) $\text{لـو}(٧\text{س} + ٢) = ٢$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$١٠^{٢} = ٧\text{س} + ٢$

$١٠٠ = ٧\text{س} + ٢$

$\text{س} = \frac{١٠٠ - ٢}{٧}$

$\text{س} = ١٤$

و) $\text{لـو}_{٩}(١ - ٢\text{س}) = ٢$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٩^{٢} = ١ - ٢\text{س}$

$٨١ = ١ - ٢\text{س}$

$\text{س} = \frac{٨١ - ١}{٢}$

$\text{س} = -٤٠$

ز) لـو$_{٤}$ (٢ − س) = $\frac{٣}{٢}$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٤^{\frac{٣}{٢}}$ = ٢ − س

س = ٢ − $(\sqrt{٤})^{٣}$

س = ٢ − ٨

س = −٦

ح) لـو$_{١٢٥}$ (٦س − ١٧) = $\frac{٢}{٣}$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$١٢٥^{\frac{٢}{٣}}$ = ٦س − ١٧

٦س = $(\sqrt[٣]{١٢٥})^{٢}$ + ١٧

س = $\frac{٢٥ + ١٧}{٦}$

س = ٧

ط) لـو$_{٥}$ $\left(\frac{س − ١}{١٠}\right)$ = −١ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٥^{-١}$ = $\frac{س − ١}{١٠}$

$\frac{١}{٥}$ = $\frac{س − ١}{١٠}$

١٠ = ٥س − ٥

س = ٣

ي) لـو$_{٦}$ $\frac{٢}{س}$ = −٢ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٦^{-٢}$ = $\frac{٢}{س}$

$\frac{١}{٣٦}$ = $\frac{٢}{س}$

س = ٣٦ × ٢

س = ٧٢

ك) لـو$_{س}$ $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢}$ = −٢ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$س^{-٢}$ = $\frac{١}{٤^{٢}}$

$\frac{١}{س^{٢}}$ = $\frac{١}{٤^{٢}}$

س = ٤

ل) لـو$_{٩}$ $\left(\frac{س + ١}{س + ٢}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ حوّل إلى الصيغة الأسيّة

$٩^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{س + ١}{س + ٢}$

٣ = $\frac{س + ١}{س + ٢}$ تُضرب في س + ٢

٣س + ٦ = س + ١

س = $\frac{١ − ٦}{٢}$

س = −$\frac{٥}{٢}$

٣) أ) لـو$_{٥}$ س + لـو$_{٥}$ ٢ = لـو$_{٥}$ ١٢

لـو$_{٥}$ ٢س = لـو$_{٥}$ ١٢

٢س = ١٢

س = ٦

ب) لـو$_{٧}$ ٩٦ = لـو$_{٧}$ س − لـو$_{٧}$ ١٢

لـو$_{٧}$ ٩٦ = لـو$_{٧}$ $\frac{س}{١٢}$

٩٦ = $\frac{س}{١٢}$

س = ١١٥٢

ج) لـو ٢٠ = لـو ٥ − لـو س

لـو ٢٠ = لـو $\frac{٥}{س}$

٢٠ = $\frac{٥}{س}$

س = $\frac{١}{٤}$

د) ٢ لـو$_{٣}$ ٨ = لـو$_{٣}$ س + لـو$_{٣}$ ٤٠

لـو$_{٣}$ ٦٤ = لـو$_{٣}$ ٤٠س

$٤٠\text{س} = ٦٤$

$\text{س} = ١,٦$

هـ $\text{لـو}_{٨}\, ١٥ = ٢\text{لـو}_{٨}\, ٦ - \text{لـو}_{٨}\, ٢\text{س}$

$\text{لـو}_{٨}\, ١٥ = \text{لـو}_{٨}\, \frac{٦^{٢}}{٢\text{س}}$

$١٥ = \frac{١٨}{\text{س}}$

$\text{س} = ١,٢$

و $\text{لـو}_{٣}\, ٣٤ = \text{لـو}_{٣}\, ١٧\text{س} - \text{لـو}_{٣}\, ٥$

$\text{لـو}_{٣}\, ٣٤ = \text{لـو}_{٣}\, \frac{١٧\text{س}}{٥}$

$٣٤ = \frac{١٧\text{س}}{٥}$

$\text{س} = ١٠$

ز $٢\text{لـو}_{١١}\, ١٠ = \text{لـو}_{١١}\, \frac{\text{س}}{٢} + \text{لـو}_{١١}\, ٨$

$\text{لـو}_{١١}\, ١٠^{٢} = \text{لـو}_{١١} \left(\frac{\text{س}}{٢} \times ٨\right)$

$٤\,\text{س} = ١٠٠$

$\text{س} = ٢٥$

ح $\text{لـو}_{٣}\, ١٨ - \text{لـو}_{٣}\, \frac{٢\text{س}}{٥} = \text{لـو}_{٣}\, ٢$

$\text{لـو}_{٣}\, \frac{١٨\times٥}{٢\text{س}} = \text{لـو}_{٣}\, ٢$

$\frac{١٨\times٥}{٢\text{س}} = ٢$

$\text{س} = ٢٢,٥$

٤) أ $\text{لـو}_{٥}\, (٢\text{س} - ١) + \text{لـو}_{٥}\, ٣ = \text{لـو}_{٥}\, ٢١$

$\text{لـو}_{٥}\, ٣(٢\text{س} - ١) = \text{لـو}_{٥}\, ٢١$

$٢\text{س} - ١ = ٧$

$\text{س} = ٤$

ب $\text{لـو}_{٧}\, ٢\text{س} = ٢\text{لـو}_{٧}\, ١٤ - \text{لـو}_{٧}\, ٢$

$\text{لـو}_{٧}\, ٢\text{س} = \text{لـو}_{٧}\, \frac{١٤^{٢}}{٢}$

$٢\text{س} = ٩٨$

$\text{س} = ٤٩$

ج $٢\text{لـو}_{٩}\, ٢ + \text{لـو}_{٩}\, \text{س} = \text{لـو}_{٩}\, ٢٠$

$\text{لـو}_{٩}\, (٢^{٢} \times \text{س}) = \text{لـو}_{٩}\, ٢٠$

$٤\text{س} = ٢٠$

$\text{س} = ٥$

د $\text{لـو}_{٣}\, (٢ - \text{س}) + \text{لـو}_{٣}\, ٩ = \text{لـو}_{٣}\, ٦$

$\text{لـو}_{٣}\, ٩(٢ - \text{س}) = \text{لـو}_{٣}\, ٦$

$١٨ - ٩\text{س} = ٦$

$\text{س} = \frac{٤}{٣}$

هـ $\text{لـو}_{١١}(\text{س} - ٤) = \text{لـو}_{١١}\, ٥ + \text{لـو}_{١١}\, ٢$

$\text{لـو}_{١١}(\text{س} - ٤) = \text{لـو}_{١١}(٥ \times ٢)$

$(\text{س} - ٤) = ١٠$

$\text{س} = ١٤$

و $\text{لـو}_{٣}(١ - \text{س}) - \text{لـو}_{٣}\, ٢\text{س} = -٢$

$\text{لـو}_{٣}(١ - \text{س}) - \text{لـو}_{٣}\, ٢\text{س} = \text{لـو}_{٣}\, \frac{١}{٩}$

$\text{لـو}_{٣}\, \frac{١ - \text{س}}{٢\text{س}} = \text{لـو}_{٣}\, \frac{١}{٩}$

$\frac{١ - \text{س}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٩}$

$٩ - ٩\text{س} = ٢\text{س}$

$\text{س} = \frac{٩}{١١}$

ز $\text{لو}_{٢}\,١٣ = \text{لو}_{٢}(\text{س} - ٣) - \text{لو}_{٢}\,\text{س}$

$\text{لو}_{٢}\,١٣ = \text{لو}_{٢}\,\dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}}$

$١٣ = \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}}$

$\text{س} = -\dfrac{١}{٤}$

ح $\text{لو}_{٠٫٥}\,٣٢ - ٢\text{لو}_{٠٫٥}\,٢\sqrt{\text{س}} = \text{لو}_{٠٫٥}\,١٠$

$\text{لو}_{٠٫٥}\,٣٢ - \text{لو}_{٠٫٥}\,٢^{٢}(\sqrt{\text{س}})^{٢} = \text{لو}_{٠٫٥}\,١٠$

$\text{لو}_{٠٫٥}\,\dfrac{٣٢}{٤ \times \text{س}} = \text{لو}_{٠٫٥}\,١٠$

$١٠ = \dfrac{٨}{\text{س}}$

$\text{س} = \dfrac{٤}{٥}$

٥) أ $\text{لو}_{\text{س}}\,٤٢ - \text{لو}_{\text{س}}\,٦ = ١$

$\text{لو}_{\text{س}}\,\dfrac{٤٢}{٦} = ١$

$\text{س} = ٧$

ب $\text{لو}_{\text{س}}\,٣٦ - ١ = \text{لو}_{\text{س}}\,٤$

$\text{لو}_{\text{س}}\,\dfrac{٣٦}{٤} = ١$

$\text{س} = ٩$

ج $٢ - \dfrac{١}{٢}\text{لو}_{\text{س}}\,٣٦ = ١ + ٢\text{لو}_{\text{س}}\,٣$

$٢ - ١ = ٢\text{لو}_{\text{س}}\,٣ + \dfrac{١}{٢}\text{لو}_{\text{س}}\,٣٦$

$١ = \text{لو}_{\text{س}}\left(٣^{٢} \times ٣٦^{\frac{١}{٢}}\right)$

$\text{لو}_{\text{س}}\left(٣^{٢} \times ٣٦^{\frac{١}{٢}}\right) = ١$

$\text{لو}_{\text{س}}\,٥٤ = ١$

$\text{س} = ٥٤$

٦) $\text{لو}_{٢}\,(\text{س} + ٣) = ١ + \text{لو}_{٢}\,\text{س}$

$\text{لو}_{٢}\,(\text{س} + ٣) = \text{لو}_{٢}\,٢ + \text{لو}_{٢}\,\text{س}$

$\text{لو}_{٢}\,(\text{س} + ٣) = \text{لو}_{٢}\,(٢\text{س})$

$\text{س} + ٣ = ٢\text{س}$

$\text{س} = ٣$

تمارين ٦-٥

١) أ) $\text{٥}^{\text{س}} = \text{٢٠}$

$\text{لـو } \text{٥}^{\text{س}} = \text{لـو ٢٠}$

$\text{س لـو ٥} = \text{لـو ٢٠}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٢٠}}{\text{لـو ٥}}$

$\text{لـو } \text{٥}^{\text{س}} = \text{لـو ٢٠}$

$\text{س} = \text{١,٨٦}$

ب) $\text{٢}^{\text{س}} = \text{٣٥}$

$\text{لـو } \text{٢}^{\text{س}} = \text{لـو ٣٥}$

$\text{س لـو ٢} = \text{لـو ٣٥}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٣٥}}{\text{لـو ٢}}$

$= \text{٥,١٣}$

ج) $\text{٣}^{\text{س}} - \text{٨} = \text{٠}$

$\text{لـو } \text{٣}^{\text{س}} = \text{لـو ٨}$

$\text{س لـو ٣} = \text{لـو ٨}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٨}}{\text{لـو ٣}}$

$\text{س} = \text{١,٨٩}$

د) $\text{٧}^{\text{س} - \text{٤}} = \text{٣٢}$

$\text{لـو } \text{٧}^{\text{س} - \text{٤}} = \text{لـو ٣٢}$

$(\text{س} - \text{٤})\text{ لـو ٧} = \text{لـو ٣٢}$

$\text{س} - \text{٤} = \frac{\text{لـو ٣٢}}{\text{لـو ٧}}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٣٢}}{\text{لـو ٧}} + \text{٤}$

$\text{س} = \text{٥,٧٨}$

هـ) $\text{١,١}^{\text{٢س}} = \text{٠,٧}$

$\text{لـو } \text{١,١}^{\text{٢س}} = \text{لـو ٠,٧}$

$\text{٢س لـو ١,١} = \text{لـو ٠,٧}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٠,٧}}{\text{٢لـو ١,١}}$

$\text{س} = -\text{١,٨٧}$

و) $\text{٦}^{\text{٢س} - \text{١}} = \text{٥}$

$\text{لـو } \text{٦}^{\text{٢س} - \text{١}} = \text{لـو ٥}$

$(\text{٢س} - \text{١})\text{ لـو ٦} = \text{لـو ٥}$

$\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\frac{\text{لـو ٥}}{\text{لـو ٦}} + \text{١}\right)$

$\text{س} = \text{٠,٩٤٩}$

ز) $\text{٣}^{\text{س} - \text{١}} = \text{٠,٢}$

$\text{لـو } \text{٣}^{\text{س} - \text{١}} = \text{لـو ٠,٢}$

$(\text{س} - \text{١})\text{ لـو ٣} = \text{لـو ٠,٢}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٠,٢}}{\text{لـو ٣}} + \text{١}$

$\text{س} = -\text{ ٠,٤٦٥}$

ح) $\text{٢} \times \text{٩}^{\text{٢س}} = \text{٨٧٦}$

$\text{لـو } \text{٩}^{\text{٢س}} = \text{لـو ٤٣٨}$

$\text{٢س لـو ٩} = \text{لـو ٤٣٨}$

$\text{س} = \frac{\text{لـو ٤٣٨}}{\text{٢لـو ٩}}$

$\text{س} = \text{١,٣٨}$

ط) $\frac{\text{٢}^{\text{٢س} - \text{٣}}}{\text{٣}} = \text{١٧}$

$\text{لـو } \text{٢}^{\text{٢س} - \text{٣}} = \text{لـو ٥١}$

$(\text{٢س} - \text{٣})\text{ لـو ٢} = \text{لـو ٥١}$

$$\text{س} = \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{لو}\ ٥١}{\text{لو}\ ٢} + ٣\right)$$

$$= ٤,٣٤$$

ي) $\frac{٢}{٥} \times ٥^{٢\text{س}} = \frac{٧}{٣}$

$$\text{لو}\ ٥^{٢\text{س}} = \text{لو}\ \frac{٣٥}{٦}$$

$$\text{س} = \frac{\text{لو}\ \frac{٣٥}{٦}}{٢\text{لو}\ ٥}$$

$$= ٠,٥٤٨$$

ك) $\frac{٣^{٢\text{س}-١}}{٣^{\text{س}+٢}} = ٣٣$

$$٣^{\text{س}-٣} = ٣٣$$

$$\text{لو}\ ٣^{\text{س}-٣} = \text{لو}\ ٣٣$$

$$\text{س} = \frac{\text{لو}\ ٣٣}{\text{لو}\ ٣} + ٣$$

$$= ٦,١٨$$

ل) $٧^{\text{س}-٢} = ٢^{\text{س}}$

$$\text{لو}\ ٧^{\text{س}-٢} = \text{لو}\ ٢^{\text{س}}$$

$$(\text{س}-٢)\,\text{لو}\ ٧ = \text{س}\ \text{لو}\ ٢$$

$$\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}} = \frac{\text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٧}$$

$$١ - \frac{٢}{\text{س}} = \frac{\text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٧}$$

$$\frac{٢}{\text{س}} = ١ - \frac{\text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٧}$$

$$\frac{٢}{\text{س}} = \frac{\text{لو}\ ٧ - \text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٧}$$

$$\text{س} = \frac{٢\text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٧ - \text{لو}\ ٢}$$

$$= ٣,١١$$

٢) أ) $٨ \times ٢^{\text{س}} + ٤ \times ٢^{\text{س}+١} = ٢^{٣} \times ٢^{\text{س}} + ٢^{٢} \times ٢^{\text{س}+١}$

$$= ٢^{\text{س}+٣} + ٢^{\text{س}+٣}$$

$$= ٢ \times ٢^{\text{س}+٣}$$

ب) $٨٠ \times ٢^{\text{س}} + ٤٠ \times ٢^{\text{س}+١} = ٦٦٦٦$

$$١٠(٨ \times ٢^{\text{س}} + ٤ \times ٢^{\text{س}+١}) = ٦٦٦٦$$

$$٢ \times ٢^{\text{س}+٣} = ٦٦٦,٦$$

$$٢^{\text{س}+٣} = ٣٣٣,٣$$

$$\text{لو}\ ٢^{\text{س}+٣} = \text{لو}\ ٣٣٣,٣$$

$$(\text{س} + ٣)\,\text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٣٣٣,٣$$

$$\text{س} = \frac{\text{لو}\ ٣٣٣,٣}{\text{لو}\ ٢} - ٣$$

$$= ٥,٣٨$$

٣) $٨^{-\text{س}} = \frac{١}{٦٠}$

$$٨^{\text{س}} = ٦٠$$

$$\text{لو}_{٨}\ ٨^{\text{س}} = \text{لو}_{٨}\ ٦٠$$

$$\text{س} = \text{لو}_{٨}\ ٦٠ = ١,٩٧$$

٤) أ) $\text{م} = ١٠٠٠ \times ٠,٩^{١٠} = ٣٤٩\text{غ}$

ب) $٥٠٠ = ١٠٠٠ \times ٠,٩^{\text{ن}}$

$$٠,٩^{\text{ن}} = ٠,٥$$

$$\text{لو}\ ٠,٩^{\text{ن}} = \text{لو}\ ٠,٥$$

$$\text{ن} = \frac{\text{لو}\ ٠,٥}{\text{لو}\ ٠,٩}$$

$$= ٦,٥٨\ ....$$

تحتاج قطعة من هذه المادة إلى ٦,٥٨ سنوات تقريبًا حتى تضمحل إلى نصف كتلتها.

٥) أ عند ن = ٠، ي = ٤٣٦ × ١,٠٥٦^{٠} = ٤٣٦ م/ثانية

ب (١,٠٥٦ − ١) × ١٠٠ = ٥,٦ ٪

ج ٢٠٠٠ = ٤٣٦ × ١,٠٥٦^{ن}

٢ كم/ثانية ٢٠٠٠ م/ثانية

١,٠٥٦^{ن} = $\frac{٢٠٠٠}{٤٣٦}$

لــو ١,٠٥٦^{ن} = لــو $\frac{٢٠٠٠}{٤٣٦}$

ن = $\frac{\text{لــو } \frac{٢٠٠٠}{٤٣٦}}{\text{لــو } ١,٠٥٦}$

ن = ... ٢٧,٩٥

يحتاج الصاروخ إلى ٢٨ ثانية تقريبًا ليصل إلى سرعة ٢ كم/ثانية

د مع احتراق الوقود، تتناقص كتلة الصاروخ، الأمر الذي يسمح له بطيران أسرع.

٦) أ ل = ٤٠٠٠، م = ٥

و = ٤٠٠٠ × ١,٠٣^{٥}

= ٤٦٣٧

القيمة بعد مرور ٥ أشهر هي ٤٦٣٧ ريالًا عُمانيًا.

ب ل = ٤٠٠٠، و = ٢ × ٤٠٠٠ = ٨٠٠٠

٤٠٠٠ × ١,٠٣^{م} = ٨٠٠٠ اكتب المعادلة التي يجب حلها، وبسّط

١,٠٣^{م} = ٢ خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للجهتَين

لــو ١,٠٣^{م} = لــو ٢ استخدم قانون القوة

م لــو ١,٠٣ = لــو ٢ اقسم الجهتَين على لــو ١,٠٣

م = $\frac{\text{لــو ٢}}{\text{لــو ١,٠٣}}$

م = ٤٤,٣٢...

أعطِ الإجابة حسب السؤال

ستتضاعف قيمة الاستثمار بعد مرور ٢٤ شهرًا تقريبًا.

٧) أ عندما ﻧ = ٨، ل = ٣ × ٢^١٢ = ١٢٢٨٨

ب ٣ × ٢^٢٠−ن = ٣٨٤

اكتب المعادلة وبسّطها

٢^٢٠−ن = ١٢٨

خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للجهتَين

لـو ٢^٢٠−ن = لـو ١٢٨

استخدم قانون القوة

(٢٠ − ن) لـو ٢ = لـو ١٢٨

أعد ترتيبها لتجد قيمة ن

ن = ٢٠ − (لـو ١٢٨ / لـو ٢)

أوجِد القيمة

ن = ١٣

يتطلب نزول العدد إلى ٣٨٤ حشرة ١٣ أسبوعًا.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ الأساس = ٥، الأسّ = س، القيمة = ٢٠،

$\therefore \text{لو}_{٥}\ ٢٠ = \text{س}$

ب الأساس = ١٣، الأسّ = ص، القيمة = ١٠٠،

$\therefore ١٣^{\text{ص}} = ١٠٠$

٢) أ $\text{لو}_{١٠}\ ٢٥٠٠ = \text{لو}_{١٠}\ ٢٥ + \text{لو}_{١٠}\ ١٠٠$

$\approx ١{,}١٩ + ١{,}٧٠ = ٢{,}٨٩$

ب $\text{لو}_{١٠}\ ٤ = \text{لو}_{١٠}\ ١٠٠ - \text{لو}_{١٠}\ ٢٥$

$\approx ١{,}٧٠ - ١{,}١٩ = ٠{,}٥١$

ج $\text{لو}_{١٠}\ \frac{١}{٤} = \text{لو}_{١٠}\ ٢٥ - \text{لو}_{١٠}\ ١٠٠ \approx ١{,}١٩ - ١{,}٧٠$

$= -٠{,}٥١$

د $\text{لو}_{١٠}\ ٦٢٥ = \text{لو}_{١٠}\ ٢٥^{٢} = ٢\ \text{لو}_{١٠}\ ٢٥ \approx ٢ \times ١{,}١٩$

$= ٢{,}٣٨$

هـ $\text{لو}_{١٠}\ ١٥٠٠ = \text{لو}_{١٠}\ ١٥ + \text{لو}_{١٠}\ ١٠٠ \approx ١ + ١{,}٧٠$

$= ٢{,}٧٠$

و $\text{لو}_{١٠}\ \frac{٥}{٣} = \text{لو}_{١٠}\ ٢٥ - \text{لو}_{١٠}\ ١٥ \approx ١{,}١٩ - ١$

$= ٠{,}١٩$

٣) أ $\text{لو}_{٠{,}٢}\ ٥ - ٢\ \text{لو}_{٠{,}٢}\ \sqrt{\text{س}} = \text{لو}_{٠{,}٢}\ ٠{,}٠٠٨$

$-١ - \text{لو}_{٠{,}٢}\ \text{س} = ٣$

$\text{لو}_{٠{,}٢}\ \text{س} = -٤$

$\text{س} = ٠{,}٢^{-٤}$

$= ٦٢٥$

ب $\text{لو}_{٤}\ ٢^{٢\text{س}-١} = ٣\ \text{لو}_{٤}\ \frac{١}{٦٤}$

$\text{لو}_{٤}\ ٢^{٢\text{س}-١} = (-٣ \times ٣)$

$٢^{٢\text{س}-١} = ٤^{-٩}$

$٢^{٢\text{س}-١} = ٢^{-١٨}$

$٢\text{س} - ١ = -١٨$

$\text{س} = -\frac{١٧}{٢}$

٤) أ $\frac{٩^{٣-\text{س}}}{٣^{٢\text{س}-٥}} = ١١ \times ٢٧^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{٣^{٦-٢\text{س}}}{٣^{٢\text{س}-٥}} = ١١ \times ٩$

$٣^{٦-٢\text{س}-(٢\text{س}-٥)} = ٩٩$

$٣^{١١-٤\text{س}} = ٩٩$

$\text{لو}\ ٣^{١١-٤\text{س}} = \text{لو}\ ٩٩$

$(١١-٤\text{س})\ \text{لو}\ ٣ = \text{لو}\ ٩٩$

$\text{س} = \frac{١}{٤}\left(١١ - \frac{\text{لو}\ ٩٩}{\text{لو}\ ٣}\right)$

$\text{س} = ١{,}٧٠$

ب $\frac{٤^{٢\text{س}}}{٨^{٥-٢\text{س}}} - \text{لو}_{٤}\ ٣٢ = \text{لو}_{١٦}\ ٤$

$\frac{٢^{٤\text{س}}}{٢^{١٥-٦\text{س}}} - \frac{٥}{٢} = \frac{١}{٢}$

$٢^{١٠\text{س}-١٥} = ٣$

$(١٠\text{س} - ١٥)\ \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٣$

$\text{س} = \frac{١}{١٠}\left(\frac{\text{لو}\ ٣}{\text{لو}\ ٢} + ١٥\right)$

$\text{س} = ١{,}٦٦$

٥) أ $\left(\frac{١}{٢٧} \times ٣^{\text{س}-١}\right) \div (٩ \times ٣^{٤-\text{س}})$

$= (٣^{-٣} \times ٣^{\text{س}-١}) \div (٣^{٢} \times ٣^{٤-\text{س}})$

$= ٣^{\text{س}-٤} \div ٣^{٦-\text{س}}$

$= ٣^{\text{س}-٤-(٦-\text{س})}$

$= ٣^{٢\text{س}-١٠}$

ب الطرف الأيسر من المعادلات في الجزئيتين أ و ب

متساويان لأن $\frac{١}{٢٧} \div ٩ = \frac{٤}{٩} \div ١٠٨$

تبسط المعادلة في الجزئية ب إلى $٣^{٢\text{س}-١٠} = ١٠٠$

$لـو ٣^{٢س-١٠} = لـو ١٠٠$

$(٢س - ١٠)\ لـو ٣ = لـو ١٠٠$

$٢س - ١٠ = \frac{٢}{لـو ٣}$

$س = \frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{لـو ٣} + ١٠\right)$

= ٧,١٠ مقربة إلى ٣ أرقام معنوية

٦) **أ** من المعلومات المعطاة، أ = ٢٤٠،

ب = ١ - ٠,٠٤ = ٠,٩٦

ب $س = ٢٤٠ \times ٠,٩٦^{١٠} \approx ١٦٠$ كم/ساعة

الوحدة السابعة

المصفوفات Matrices

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	مصادر أخرى	المفردات
٧-١ رتبة المصفوفة وأنواع المصفوفات	٧-١ يعرف ما هي المصفوفة ويصفها باستخدام الصفوف والأعمدة، ويعرف خصائص المصفوفة الصفرية والمحايدة والمربعة.	٣	تمارين ٧-١ الأمثلة: ١، ٢، ٣، ٤		المصفوفات، رتبة المصفوفة، الصفوف، الأعمدة، العنصر، المصفوفة الصفية، المصفوفة العمودية، المصفوفة المربعة، المصفوفة الصفرية، المصفوفات المتساوية
٧-٢ جمع وطرح المصفوفات	٧-٢ يجمع ويطرح المصفوفات.	٣	استكشف ١ المثال ٥ تمارين ٧-٢		إبدالية
٧-٣ ضرب المصفوفات					
٧-٣أ الضرب القياسي.	٧-٣ يضرب مصفوفة في عدد ما.	٣	المثالان ٦، ٧ تمارين ٧-٣أ		العدد القياسي
٧-٣ب ضرب مصفوفة بأخرى	٧-١ يعرف ما هي المصفوفة ويصفها باستخدام الصفوف والأعمدة، ويعرف خصائص المصفوفة الصفرية والمحايدة والمربعة. ٧-٤ يتعرّف على شرط ضرب المصفوفات ويجد ناتج ضربها. ٧-٥ يتعرّف أن ضرب المصفوفات ليس تبادليًا.	٣	استكشف ٢ الأمثلة ٨، ٩، ١٠، ١١ تمارين ٧-٣ب	شريحة العرض التوضيحي الإلكتروني ٧-١	غير إبدالية المصفوفة المحايدة
٧-٤ محدد المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢	٧-٦ يحسب محدد المصفوفة ٢ × ٢ ٧-٧ يعرف خصائص المصفوفة المنفردة والمصفوفة غير المنفردة.	٢	المثال ١٢، ١٣ تمارين ٧-٤		محدد، القطر الرئيسي، القطر الثانوي، منفردة، غير منفردة
٧-٥ معكوس المصفوفة	٧-٨ يجد المصفوفة العكسية للمصفوفات ٢ × ٢ غير المنفردة.	٣	استكشف ٣ المثال ١٤ تمارين ٧-٥	شريحة العرض التوضيحي الإلكتروني ٧-٢	معكوس المصفوفة
تمارين مراجعة نهاية الوحدة ٧		٢			

٧-١ رتبة المصفوفة وأنواع المصفوفات

المفردات

المصفوفات: ترتيب للقيم في شكل صفوف وأعمدة داخل أقواس.

الرتبة: تحدّد رتبة المصفوفة من خلال عدد الصفوف × عدد الأعمدة.

العنصر: هو عدد أو عبارة رياضية أدخلت إلى المصفوفة.

الصفوف: ترتيبات أفقية لعناصر معيّنة.

الأعمدة: ترتيبات رأسية لعناصر معيّنة.

المصفوفة العمودية: تتكوّن من عمود واحد وأي عدد من الصفوف.

المصفوفة الصفية: تتكوّن من صف واحد وأي عدد من الأعمدة.

المصفوفة المربعة: تتكوّن من عدد متساو من الأعمدة والصفوف.

المصفوفة الصفرية: أي مصفوفة تكون كل عناصرها مساوية للصفر.

ملاحظات للمعلِّمين

يجب أن يتعرف الطلبة أول الأمر على رتبة المصفوفة، فهذه حقيقة مهمة تحدد إمكانية إجراء أي عملية على المصفوفة. عند الحديث عن رتبة المصفوفة:

١) أكّد على استخدام الطلبة تعبير "صفوف في أعمدة"، وعرّفهم بخطأ استخدام "أعمدة في صفوف".

٢) ركّز على أهمية تنظيم وترتيب مواقع العناصر في المصفوفة حيث إنها تؤثر في إجراء العمليات الحسابية للمصفوفة.

عرّف الطلبة بأهمية المصفوفات في الحياة الواقعية، وفي مجالات الاقتصاد والتجارة حيث توظف الشركات المصفوفات في حساب المصروفات الشهرية، وحساب السلع المنتجة بأنواعها المختلفة، وكذلك في التطبيقات الفيزيائية والميكانيكية وعمليات التشفير لحفظ البيانات والمعلومات.

ذكِّرهم بأهميتها وأنهم سيدرسونها في صور حسابات رياضية سهلة ومبسطة.

أفكار للتعليم

قدِّم للطلبة أمثلة تساعدهم على التعرف على رتب المصفوفات، كأن تطلب إليهم كتابة مصفوفة صفية من أربعة أعمدة حيث يكون ناتج جمع العناصر الأربعة يساوي صفرًا، أو كتابة مصفوفة عمودية من ثلاثة صفوف يكون ناتج ضرب عناصرها يساوي ٤٢

أو تطلب إليهم إخبارك عن عدد العناصر في مصفوفة مربعة من رتبة ٢ × ٢ أو مصفوفة من رتبة ٣ × ٢ أو مصفوفة من رتبة ٢ × ٣

قدم للطلبة مجموعة بطاقات عليها مصفوفات مختلفة (٣ مصفوفات مربعة مختلفة، ٣ مصفوفات مستطيلة ذات رتب مختلفة، ٣ مصفوفات عمودية مختلفة، ٣ مصفوفات صفية مختلفة) ومجموعة بطاقات أخرى تمثل رتب المصفوفات، واطلب إليهم المطابقة بين مجموعة البطاقات الأولى ومجموعة البطاقات الثانية.

من المفاهيم المهمة التي يجب أن يفهمها الطلبة هي أن المصفوفتَين يمكن أن تتساويا فقط في حال كان لهما الرتبة نفسها، وفقط إذا كانت كل العناصر المتناظرة في المصفوفتَين متساوية.

ومن الأمثلة الواقعية التي يمكن ذكرها على استخدام المصفوفات تمثيل عدد سكان قرية ما على شكل مصفوفة حيث يمثل كل عنصر عدد أفراد الأسرة في المنزل، ويتم ترتيبها حسب نمط معيّن، كالمنازل الأحدث في البناء، أو عدد أفراد الأسرة، ثم القيام بالعمليات المطلوبة.

دعم الطلبة

تأكد من تكوين الطلبة لصورة واضحة عن ماهية الصف (ترتيب أفقي) وماهية العمود (ترتيب رأسي).

تأكد أيضًا من أن الطلبة يمكنهم تحديد رتبة المصفوفة، ووصف العناصر في المصفوفة، والتمييز بين أنواع المصفوفات المختلفة، وأن يكونوا قادرين على تحديد العناصر المتناظرة عند اختبار تساوي مصفوفتين.

يمثل هذا المخطط ١٥ طالبًا، أ إلى ص، ومواقع مقاعدهم في غرفة صف صغيرة.

$$\begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ي} & \text{ط} & \text{ح} & \text{ز} & \text{و} \\ \text{ص} & \text{ن} & \text{م} & \text{ل} & \text{ك} \end{pmatrix}$$

يمثّل الطلبة من خلال مصفوفة من ١٥ عنصرًا، مرتبة في ٣ صفوف و ٥ أعمدة.

رتبة المصفوفة ٣ × ٥.

الطلبة و، ز، ح، ط، ي في الصف الثاني.

الطلبة هـ، ي، ص في العمود الخامس.

الطالب ن في الصف الثالث، العمود الرابع.

الطالب الذي في الصف الأول والعمود الثاني هو ب.

يبيّن المخطط الآتي رقم الصف ورقم العمود لكل من الطلبة الـ ١٥

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_{\text{٥١}} & \text{أ}_{\text{٤١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{٥٢}} & \text{أ}_{\text{٤٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٥٣}} & \text{أ}_{\text{٤٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \end{pmatrix}$$

يمثل العنصر $\text{أ}_{\text{٣٢}}$ على سبيل المثال، الطالب الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث.

تحدّي الطلبة

قد يكون غير واضح للطلبة وجود علاقة بين عدد الصفوف وعدد الأعمدة وعدد العناصر (الصفوف × الأعمدة = عدد العناصر). يمكنك أن تطلب إليهم إيجاد هذه العلاقة وأن تسألهم عن الطرائق المستخدمة لإيجاد أي من هذه الأعداد إذا كانوا يعرفون العددَين الآخرَين.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧–١

٢-٧ جمع وطرح المصفوفات

المفردات

إبدالية: هو المبدأ الذي يشرح أن ترتيب الحدود ليس له أهمية عند القيام بالعمليات الرياضية. (عملية جمع المصفوفات إبدالية حيث أ + ب = ب + أ)

ملاحظات للمعلِّمين

يمكن جمع أو طرح مصفوفتين فقط إذا كان لهما الرتبة نفسها تحديدًا. فعند جمع أو طرح مصفوفتين، نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة فيهما.

يساعد استكشف ١ الطلبة في رؤية سبب اعتماد هاتين العمليتين على رتب المصفوفات، لأنه سيتبقى لديهم عناصر زائدة إذا لم تكن الرتب هي ذاتها.

شدد على أن ينتبه الطلبة عند طرح العناصر السالبة، مثل "اطرح (−٣)" مطابقة لـ "اجمع ٣". يمكن شرح الأمر بشكل واضح من خلال طرح مصفوفة غير صفرية من مصفوفة صفرية، مثلًا:

$$\begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ٠ & ٠\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-١ & -٢\\ -٣ & -٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٢\\ ٣ & ٤\end{pmatrix}$$

ملاحظة: سيطور الطلبة ويكتسبون مهارتَي الجمع والطرح في المصفوفات في درس الضرب في عدد قياسي (ضرب المصفوفة في عدد).

أفكار للتعليم

أعط الطلبة وقتًا لحل نشاط استكشف ١ وناقش معهم ما توصلوا إليه. سيساعد المثال ١ الطلبة على تثبيت ما توصلوا إليه.

يمكنك بالإضافة إلى ذلك، أن تعطي الطلبة قائمة من المصفوفات المسماة، وأن تطلب إليهم ربط تلك التي يمكن أن تجمع مع بعضها، ثم تسألهم: "هل نحصل على النتيجة نفسها عند جمع ب مع أ كتلك التي نحصل عليها عند جمع أ مع ب ؟"، "إذا أمكن جمع هاتين المصفوفتين، فهل يعني هذا تلقائيًا أنه يمكن طرحهما؟"، "وهل نحصل على النتيجة نفسها عند طرح ب من أ كتلك التي نحصل عليها عند طرح أ من ب؟"

دعم الطلبة

تأكد من أن الطلبة قد فهموا بوضوح رتبة المصفوفة، وأنهم يميزون المصفوفات الصفية، والمصفوفات العمودية، والمصفوفات المربعة بالتحديد.

يجب أن يعرف الطلبة أنه إذا أمكن جمع أو طرح مصفوفتين، فإن المصفوفة الناتجة سيكون لها رتبة المصفوفتين نفسها. يمكن أن تساعد الطلبة من خلال الطلب إليهم أن يكتبوا رتبة المصفوفة فوقها، مثل:

$$\overset{١ \times ٣}{\begin{pmatrix}٤ & ٢ & -١\end{pmatrix}},\quad \overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix}-٣ & -١\\ ١ & ٣\end{pmatrix}}$$

الرابط الآتي هو صفحة إلكترونية، وفي أسفل الصفحة مقطع تصويري من ٥ دقائق يقدم بوضوح قوانين الجمع والطرح في المصفوفات: https://math.tools/calculator/matrix/addition

https://math.tools/calculator/matrix/addition

تحدّي الطلبة

اطلب إلى الطلبة أن يناقشوا التراتيب الممكنة للعبارة أ = ب − ج، حيث أ، ب، ج، مصفوفات لها الرتبة نفسها.

هل التراتيب ب = أ + ج، ج = ب − أ، وحتى أ − ب + ج = مصفوفة صفرية، صحيحة دائمًا؟ هل يمكنهم إيجاد أي أمثلة حيث أحد التراتيب السليمة ليس صحيحًا؟

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

١) يمكن القيام بعمليات الجمع والطرح المطلوبة في الأفرع أ، ج، د.

لا يمكن جمع أو طرح المصفوفتين في الفرع ب، هـ لأن ليس لهما الرتبة نفسها.

٢) نتائج الأفرع أ، ج، د هي:

أ) $\begin{pmatrix} ٦ & ٩ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} -٣ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix}$

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧–٢

٧-٣ ضرب المصفوفات

٧-٣أ الضرب القياسي

المفردات

العدد القياسي: عدد حقيقي يُضرب في جميع عناصر المصفوفة.

الضرب القياسي: عملية ضرب المصفوفة في عدد.

ملاحظات للمعلمين

يجب أن يشعر الطلبة بأن ضرب مصفوفة في عدد قياسي عملية بسيطة يسهل فهمها، لأنها تتطلب منهم ببساطة ضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد القياسي نفسه:

على سبيل المثال، $\begin{pmatrix} -٣,٥ & ٦ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ١٢ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} \frac{١}{٢} ، \begin{pmatrix} ١٦ & -٦ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} ٢$

يحتاج الطلبة أن يروا أن المصفوفة الناتجة لها الرتبة نفسها للمصفوفة التي ضربت في العدد القياسي، وأنه يمكن تطبيق الضرب في عدد قياسي على المصفوفات من أية رتبة، فاذكر لهم أن ناتج ضرب المصفوفة الصفرية في عدد قياسي هو أيضًا مصفوفة صفرية.

أفكار للتعليم

سيرى الطلبة في المثال ٦ أمثلة عن الضرب في عدد قياسي باستخدام الأعداد الصحيحة والكسور، وفي المثال ٧ يستخدم الطلبة الشرط: حتى تكون المصفوفتان متساويتين وجب أن تكون كل العناصر في المواقع المتناظرة (المتقابلة) متساوية. انطلاقًا من هذا سيكوّن الطلبة معادلات بسيطة ويحلّونها.

سيكون في مصلحة الطلبة إعطاؤهم الكثير من التمرين في موضوع الضرب في عدد قياسي. يمكنك أن تقدم لهم بعض المسائل التي يكون عليهم فيها أن يجدوا القيم الناقصة (مبيّنة هنا باللون الأحمر)، كما المثال الآتي:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-١٢} & ٦ \\ -٣ & \boxed{٤٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٦ & \boxed{٨} \\ \boxed{-٤} & ٦٠ \end{pmatrix} \frac{٣}{٤} ، \begin{pmatrix} ١٠ & \boxed{١٥} \\ \boxed{-٢٠} & ٣٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{٢} & ٣ \\ -٤ & \boxed{٦} \end{pmatrix} ٥$$

أو $\begin{pmatrix} \boxed{-٤,٥} & \boxed{٢} \\ \boxed{-٣} & \boxed{١١} \end{pmatrix} ٢ = \begin{pmatrix} -٢٧ & ١٢ \\ -١٨ & ٦٦ \end{pmatrix} \frac{١}{٣}$

دعم الطلبة

يمكن أن يكون جمع وطرح المصفوفات بالدمج مع الضرب في عدد قياسي عملية قصيرة أو طويلة، وذلك اعتمادًا على عدد العناصر في المصفوفة. قدم للطلبة الكثير من الفرص للتمرين على العملية باستخدام مصفوفات صفية وعمودية من ثلاثة عناصر على الأكثر، وذلك قبل البدء بالمثالين ٦، ٧. ففي المثال ٧، يرى الطلبة كيف يمكن أن تكوّن هذه العملية مجموعة من المعادلات الخطية التي يتوجب حلها، لذلك من المفيد أن تراجع معهم حل معادلات خطية بسيطة قبل الانطلاق في حل تمارين هذا الدرس.

يمكنك أن تقدم لهم، كطريقة بديلة، معادلتين بسيطتين مثل ٢(ص − ٣) = ١٤، ٢س = ١٠، وتسألهم عن كيفية تمثيلها على شكل مصفوفتين عموديتين متساويتين بحيث تتضمن العملية الجمع والطرح والضرب في عدد قياسي معًا: $\begin{pmatrix} ١٤ \\ ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ص - ٣ \\ س \end{pmatrix} ٢$

تحدّي الطلبة

تتطلب المعادلات التي يتم إيجادها في التمارين ٧-٣أ، التمارين ٤ إلى ٦، الكثير من التفكير المركز وسيتبيّن أنها تشكل تحديًا للطلبة يتطلب بذل الجهد. وسيكون من المفيد للطلبة أيضًا أن يتبادلوا فيما بينهم كتابة المعادلات (بأربعة مجاهيل على الأكثر)، فاطلب إلى الذين تظهر لديهم سرعة في الإنجاز أن يجدوا عبارات بدلالة س و/أو ص (وليس فقط الثوابت) لكتابة مجموعة من أربع معادلات متناسبة. يشكل السؤال المعطى أدناه مثالًا مناسبًا حيث العبارات المناسبة (الناقصة) هي التي باللون الأحمر.

$\text{٢} \times \begin{pmatrix} \text{س}+\text{١} & \text{ص}-\text{٣} \\ \text{ص}-\text{١} & \text{٨}-\text{س} \end{pmatrix} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \begin{pmatrix} \boxed{\text{٦ص}-\text{٢٤}} & \boxed{\text{٦س}+\text{١٢}} \\ \boxed{\text{٦س}+\text{٢٤}} & \boxed{\text{٧٨}-\text{٦ص}} \end{pmatrix}$، حيث تختصر المعادلات الأربع إلى ص = س + ٥

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-٣أ

٧-٣ب ضرب مصفوفة بأخرى

المفردات

ضرب المصفوفات: تشير تحديدًا إلى ضرب مصفوفة في أخرى.

غير إبدالية: هو المبدأ الذي يشرح أن ترتيب الحدود مهم عند القيام بالعمليات الرياضية. (نقول إن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية).

المصفوفة المحايدة: مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ نشير إليها بالحرف م حيث بالنسبة لأي مصفوفة مربّعة أ لها نفس ترتيب م يكون = أم = م أ = أ .

ملاحظات للمعلّمين

من المهم كثيرًا أن يفهم الطلبة الشروط المطلوبة للتمكن من ضرب مصفوفتَين، وكذلك فهم الأمر الذي يحدد رتبة المصفوفة الناتجة.

إذا لم يطّلع الطلبة على شريحة التوضيح الإلكتروني ٧-١، يمكنك استخدامها الآن كمدخل إلى ضرب مصفوفة في أخرى لمساعدتهم على فهم العملية بشكل أعمق.

ينقسم العرض إلى ثلاثة أجزاء (مصفوفة صفية × مصفوفة عمودية، مصفوفة عمودية × مصفوفة صفية، مصفوفة مربعة × مصفوفة مربعة) ويمكنك عرضها للطلبة على مرحلة واحدة، أو مرحلتَين، أو ثلاث مراحل، كما تدعو الحاجة.

كما يمكنك استخدام رتب المصفوفات بالألوان، كما في كتاب الطالب، لتكتب رتبًا لمصفوفات في الشكل

ر × ج، ل × ق. في هذه الحالة يمكن ضرب مصفوفتَين إذا كان ج = ل فقط، وتكون رتبة المصفوفة الناتجة ر × ق.

من المهم أيضًا، حين مناقشة ضرب المصفوفة في أخرى أو في عدد قياسي، أن يفهم الطلبة أنه يمكن تحريك العدد القياسي إلى أي موقع في الضرب (لأن الأعداد القياسية إبدالية في عملية الضرب).

في عملية الضرب التي نضرب فيها المصفوفة أ من اليمين في المصفوفة ك ب، يمكننا أن نكتب

أ ك ب = ك أ ب = أ ب ك

أفكار للتعليم

لتتأكد من أن الطلبة قد تمكنوا من تحقق شرط الضرب قدّم لهم هاتَين المصفوفتَين:

$$\text{أ} = \underset{}{\overset{٢ \times ١}{\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}}}، \quad \text{ب} = \overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}}$$

لا يمكن إيجاد الضرب أ ب لأن عدد الأعمدة في أ (١) ليس هو نفسه عدد الصفوف في ب (٢)

إلاّ أنه يمكن إيجاد الضرب ب أ لأن عدد الأعمدة في ب (٢) هو نفسه عدد الصفوف في أ (٢)

ضرب المصفوفات ب أ موجود ورتبته ٢ × ١

من المستحسن أن تقوم بالعملية الفعلية لإيجاد العناصر الصحيحة للمصفوفة الناتجة بعد مناقشة الشروط الواردة أعلاه.

دعم الطلبة

أشر إلى استكشف ٢ وأعطِ الطلبة أمثلة أخرى ليفكروا فيها. يمكنهم عندها ببساطة استخدام رتبتَي مصفوفتَين (من دون التفكير في العناصر) لتحديد ما إذا كان من الممكن ضربهما، وإذا كان الأمر ممكنًا، تحديد رتبة المصفوفة الناتجة.

تحدّي الطلبة

بعد كتابة الشروط المتعلقة بضرب مصفوفة في أخرى، يُطلب مناقشة الطبيعة غير التبادلية لضرب المصفوفات، ويجب أن يتم هذا الأمر باستخدام أزواج من مصفوفات من الرتبة ٢ × ٢ بعد أن يفهموا ويمارسوا طريقة إيجاد عناصر مصفوفة الناتج. وقبل تعريفهم على المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢، يمكنك أن تطلب إليهم التفكير في ماهيتها.

النتيجة الأكثر احتمالًا والتي سوف يقولونها هي أنها مصفوفة فيها أربعة عناصر كل عنصر فيها يساوي ١، وسيكون سهلًا على الطلبة أن يروا بأنفسهم أن ما فكروا فيه ليس صحيحًا.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

سيتحقق الطلبة هنا من عملية ضرب الصفوف من المصفوفة الأولى في الأعمدة من المصفوفة الثانية، وسيناقشون المسألة للتأكد من إمكانية تطبيق الخطوات.

إذا نجح الطلبة في الأمر، يمكن استخدام شريحة التوضيح الإلكتروني ٧-١ لترسيخ ما تعلموه من نشاط استكشف.

ينقسم العرض إلى ثلاثة أجزاء (مصفوفة صفية × مصفوفة عمودية، مصفوفة عمودية × مصفوفة صفية، مصفوفة مربعة × مصفوفة مربعة) ويمكنك عرضها للطلبة على مرحلة واحدة، أو مرحلتَين، أو ثلاث مراحل، كما تدعو الحاجة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-٣ب

٧-٤ محدد المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢

المفردات

محدد: ناتج ضرب عناصر القطر الرئيسي ناقص ناتج ضرب عناصر القطر الثانوي.

القطر الرئيسي: العناصر التي تقع على الخط من الزاوية العليا إلى اليمين إلى الزاوية السفلى إلى اليسار في المصفوفة المربعة.

القطر الثانوي: العناصر التي تقع على الخط من الزاوية العليا إلى اليسار إلى الزاوية السفلى إلى اليمين في المصفوفة المربعة.

منفردة: تشير إلى أي مصفوفة مربعة لأن محددها يساوي الصفر.

غير منفردة: تشير إلى أي مصفوفة لأن محددها لا يساوي الصفر.

ملاحظات للمعلِّمين

يعالج هذا الدرس حساب محدد مصفوفة من الرتبة ٢ × ٢، من خلاله يظهر للطلبة ما إذا كان للمصفوفة المربعة معكوس أم لا.

سيقوم الطلبة هنا بطرح حاصلَي ضرب القطرين، خلافًا لما يتم في عملية ضرب مصفوفة في أخرى حيث تعودوا على جمع حاصلَي الضرب.

من المهم الانتباه إلى أنه عندما تكون المصفوفة المعطاة على الشكل ك $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ج} \end{pmatrix}$، يجب أن يتم ضرب كل العناصر في العدد القياسي ك قبل محاولة حساب المحدد.

وهذا لأن | ك $\underline{\text{أ}}$ | ≠ ك | $\underline{\text{أ}}$ |، ولكن في الحقيقة | ك $\underline{\text{أ}}$ | = ك^{٢} | $\underline{\text{أ}}$ |

مثلًا، لإيجاد محدد $\underline{\text{أ}}$ = ٣ $\begin{pmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٨ & ٢- \end{pmatrix}$، نقوم أولًا بضرب كل العناصر في العدد القياسي ٣، فتعطي هذه العملية

$\underline{\text{أ}}$ = $\begin{pmatrix} ٣٠ & ١٥ \\ ٢٤ & ٦- \end{pmatrix}$ ∴ | $\underline{\text{أ}}$ | = ١٥ × ٢٤ − ٣٠ × (−٦) = ٥٤٠

لاحظ أن محدد $\begin{pmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٨ & ٢- \end{pmatrix}$ = ٦٠، أن | $\underline{\text{أ}}$ | = ٣^{٢} × ٦٠ = ٥٤٠

أفكار للتعليم

بالإضافة إلى حساب المحددات، ستكون تجربة مفيدة أن تعطي الطلبة محددًا وثلاثة عناصر في مصفوفة رتبتها ٢ × ٢، وأن تطلب إليهم إيجاد العنصر الرابع.

دعم الطلبة

تأكد من أن الطلبة قد فهموا بوضوح أنهم بحاجة إلى القيام بالطرح، وليس الجمع بين حاصلَي ضرب، عندما يطلب إليهم حساب محدد. تأكد أيضًا أنهم فهموا سبب | ك $\underline{\text{أ}}$ | ≠ ك | $\underline{\text{أ}}$ |

تحدّي الطلبة

سيجد الطلبة دعمًا في إعطائهم الكثير من الفرص والوقت لمناقشة عملهم وما يتعلمونه في حل التمرين ٣ في تمارين ٧-٤. يمكن إعطاء الطلبة المجيدين والقادرين على حل هذا التمرين بسهولة أي مصفوفة ٢×٢ يكون أحد عناصرها س ثم يُطلب إليهم تحديد قيمة س بحيث يكون للمُحدد قيمة معيّنة. هل صحيح أنه يمكن إيجاد قيمة مناسبة لـ س، مهما كان المحدد؟ الإجابة هي نعم، إلا في كثير من الأحيان في الحالات التي يكون فيها العنصر الذي يضرب في س يساوي صفرًا؛ على سبيل المثال، لا توجد قيمة لـ س عندما تكون ٥ × ٤ − ٠ × س = ١٠

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧-٤

٧-٥ معكوس المصفوفة

المفردات

معكوس: معكوس المصفوفة المربعة (٢ × ٢) أ هو المصفوفة $أ^{-١}$، بحيث يكون حاصلَي الضرب أ $أ^{-١}$، $أ^{-١}$ أ يساويان المصفوفة المحايدة م

ملاحظات للمعلِّمين

الخطوات المطلوبة لإيجاد معكوس مصفوفة غير منفردة مفصّلة في كتاب الطالب، ومن المفترض أن تكون واضحة للطلبة.

تقدم شريحة التوضيح الإلكتروني ٧-٢ الدليل بالتفصيل لإيجاد معكوس المصفوفة، كما يبيّن للطلبة كيفية التحقق من إيجاد المعكوس الصحيح. فشجّعهم دائمًا على التحقق من نواتجهم قبل استعمالها في أي حسابات أخرى، حيث توجد في نهاية العرض ثلاثة أسئلة تدرب الطلبة على تطبيق ذلك.

من المهم أن يرى الطلبة أن للمصفوفات هدفًا، وأن تشرح لهم سبب دراستهم إيّاها، إلّا أنه لا توجد أعمال تطبيقية في هذه الوحدة، لذا أشر إلى أنهم إذا درسوا الموضوع في مرحلة ما في المستقبل، فسيستخدمون المصفوفات لحل المعادلات الآنية ولتحويل الأشكال ذات البُعدَين (ومن الممكن أن يتعلموا تحويلات المجسمات في الفضاء ثلاثي الأبعاد).

أفكار للتعليم

يمكن أن تقدم للطلبة بعض الأزواج من المصفوفات وأن تطلب إليهم تحديد الأزواج التي تشكل مصفوفة ومعكوسها، فابدأ أولًا مع أزواج محددها ١، ثم توسّع للوصول إلى أزواج المصفوفات التي لا يساوي محددها ١ يمكنك تضمين الأزواج التالية:

المصفوفة $\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ محددها يساوي ١ ومعكوسها هو $\begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ٧ & -٥ \end{pmatrix}$

المصفوفة $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ محددها يساوي ١ بينما معكوسها لا يساوي $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix}$

المصفوفة $\begin{pmatrix} -٨ & ٦ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix}$ محددها يساوي ٣٨ ومعكوسها هو $\frac{١}{٣٨}\begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ ٦ & -٧ \end{pmatrix}$

المصفوفة $\begin{pmatrix} -١ & ٨ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ محددها يساوي ٣٨ بينما معكوسها لا يساوي $\frac{١}{٣٨}\begin{pmatrix} -١ & ٨ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$

وزع الطلبة في مجموعات ثنائية للقيام بحساب المعكوس لمجموعة مصفوفات مختلفة بعض منها محددها يساوي ١، وبعض منها محددها عدد موجب، وبعض منها محددها عدد سالب، وبعض منها محددها عدد كسري.

يمكنك استخدام بعض مما يأتي:

$\begin{pmatrix} ٩ & ١٠ \\ ١٠ & ١١ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ٥ & ١٨ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ٥ & -٤ \\ ٦ & -٥ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ ٩ & ٧ \end{pmatrix}$ محدد كل منها يساوي ١

$\begin{pmatrix}10&9\\-11&-10\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-18&-5\\7&2\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}4&-5\\-5&6\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-3&-4\\-7&-9\end{pmatrix}$ محدد كل منها يساوي −١

المصفوفات $\begin{pmatrix}7&10\\3&5\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}8&-2\\9&3\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-4&-2\\7&3\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-2&-4\\-1&-6\end{pmatrix}$ محدداتها هي ٥، ٤٢، ٢، ٨ على التوالي.

المصفوفات $\begin{pmatrix}7&9\\4&3\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-4&-3\\3&5\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}4&6\\-4&-7\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-2&-4\\-3&-5\end{pmatrix}$ محدداتها هي −١٥ ، −١١، −٤، −٢ على التوالي.

المصفوفات $\begin{pmatrix}2&\frac{1}{3}\\-5&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$، $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$، $\frac{3}{4}\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0.4&2\\-1&0.5\end{pmatrix}$ محدداتها هي $\frac{13}{6}$، $\frac{5}{4}$، $\frac{9}{8}$، $\frac{11}{5}$ على التوالي.

المصفوفات $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\7&3\end{pmatrix}$، $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-5\\2&6\end{pmatrix}$، $2\begin{pmatrix}0.3&-0.1\\2&-0.7\end{pmatrix}$، $\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\-3&2\end{pmatrix}$ محدداتها هي $-\frac{3}{2}$، $-\frac{8}{9}$، $-\frac{1}{25}$، $-\frac{25}{9}$ على التوالي

دعم الطلبة

شجع الطلبة على التحقق من ناتج المعكوس الذي يجدونه عبر التأكد من أن حاصل ضرب مصفوفة ومعكوسها يساوي المصفوفة المحايدة م، ولا فرق بين الترتيب التي تضرب فيه.

على سبيل المثال، إذا كان أ = $\begin{pmatrix}5&-11\\2&-4\end{pmatrix}$ ∴ أ$^{-1}$ ≠ $\begin{pmatrix}-4&11\\-2&5\end{pmatrix}$ لأن

$\begin{pmatrix}5&-11\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&11\\-2&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

المصفوفة الناتجة $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ تساوي ٢ م، ما يعني أنه ينقصنا عامل $\frac{1}{2}$

المعكوس الصحيح للمصفوفة أ هو إذًا أ$^{-1}$ = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&11\\-2&5\end{pmatrix}$ أو أ$^{-1}$= $\begin{pmatrix}-2&5.5\\-1&2.5\end{pmatrix}$

نقطة أخرى يجب أن توضحها للطلبة وهي أن | أ | × | أ$^{-1}$ | = ١

باستخدام أ = $\begin{pmatrix}5&-11\\2&-4\end{pmatrix}$، أ$^{-1}$ = $\begin{pmatrix}-2&5.5\\-1&2.5\end{pmatrix}$ مما سبق نرى أن | أ | = ٢، | أ$^{-1}$| = ٠٫٥ = $\frac{1}{2}$

تحدّي الطلبة

سيشكّل التمرين ٣ في تمارين ٧−٥ تحديًا لبعض الطلبة، وبالأخص السؤال الأخير الذي يتطلب ضرب أو جمع أو طرح المصفوفات من أجل إيجاد محدداتها.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٣

١) معكوس المصفوفة المحايدة ٢ × ٢ هو المصفوفة المحايدة ٢ × ٢ نفسها لأن ضربها في نفسها يساوي المصفوفة المحايدة.

٢) لا يوجد معكوس للمصفوفة ٢ × ٢ الصفرية (لأن محددها يساوي صفرًا) وضرب المصفوفة الصفرية في أية مصفوفة أخرى يساوي المصفوفة الصفرية.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٧–٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الوحدة السابعة

ضرب مصفوفة في أخرى

العرض التوضيحي الإلكتروني ٧-١

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

يمكن ضرب المصفوفات فقط إذا تحققت شروط محدّدة.

تتعلّق هذه الشروط برتبة المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين فقط إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

رتبة المصفوفة التي فيها ص صفًا، ع عمودًا

هي ص × ع

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

ضرب مصفوفة في أخرى

الجزء الأول

مصفوفة صفية × مصفوفة عمودية

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

المصفوفة الصفية أ مضروبة في المصفوفة العمودية ب تعطي المصفوفة أ ب (إذا كان عدد أعمدة المصفوفة أ يساوي عدد صفوف المصفوفة ب).

(المصفوفة الصفية) × (المصفوفة العمودية) = (عنصر واحد)

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

أ = (٢ ٣) هي مصفوفة صفية من الرتبة ١ × ٢

ب = $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة عمودية من الرتبة ٢ × ١

أ (١ × ٢) ب (٢ × ١) = أ ب (١ × ١)

في المصفوفة أ ب ١ × ١ = ١ عنصر

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

كيف نجد العنصر الوحيد لناتج حاصل الضرب

$$\underline{\text{أ}}\;\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix} = (\square)\text{؟}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

نضرب الصف في العمود.

يساوي العنصر الوحيد لحاصل الضرب $\underline{\text{أ}}\;\underline{\text{ب}}$

مجموع حاصلَي الضرب **٢** × **٤**، **٣** × **٥**

$$\underline{\text{أ}}\;\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix} = (\square)\text{؟}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

$$\underline{\text{أ}}\ \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

$$= (٢ \times ٤ + ٣ \times ٥)$$

$$= (٨ + ١٥)$$

$$= (٢٣)$$

٨٠

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حاصل الضرب $\underline{\text{أ}}\ \underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix} = (٢٣)$

هل يمكننا ضرب المصفوفة <u>ب</u> في المصفوفة <u>أ</u> لإيجاد حاصل الضرب <u>ب</u> <u>أ</u> ؟

ضرب مصفوفة في أخرى

الجزء الثاني

مصفوفة عمودية × مصفوفة صفية

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

$\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة عمودية من الرتبة ٢ × ١

$\underline{أ} = (٢ \quad ٣)$ هي مصفوفة صفية من الرتبة ١ × ٢

$\underset{٢ \times ١}{\underline{ب}} \quad \underset{١ \times ٢}{\underline{أ}} \quad = \quad \underset{٢ \times ٢}{\underline{ب}\,\underline{أ}}$

في المصفوفة $\underline{ب}\,\underline{أ}$ ٢ × ٢ = ٤ عناصر

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

كيف نجد العناصر الأربعة لحاصل الضرب

$$\underline{\text{أ}}\;\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٤\\٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢ & ٣\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix} \text{؟}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

كل عنصر في المصفوفة ب أ يساوي حاصل ضرب صف وعمود

$$\underline{\text{أ}}\;\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٤\\٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢ & ٣\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix} \text{؟}$$

الصف ١ x العمود ١ $\quad \begin{pmatrix}\square & ٨\\ \square & \square\end{pmatrix} = (٣\ \ ٢)\begin{pmatrix}٤\\ ٥\end{pmatrix}$

الصف ١ x العمود ٢ $\quad \begin{pmatrix}١٢ & \square\\ \square & \square\end{pmatrix} = (٣\ \ ٢)\begin{pmatrix}٤\\ ٥\end{pmatrix}$

الصف ٢ x العمود ١ $\quad \begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & ١٠\end{pmatrix} = (٣\ \ ٢)\begin{pmatrix}٤\\ ٥\end{pmatrix}$

الصف ٢ x العمود ٢ $\quad \begin{pmatrix}\square & \square\\ ١٥ & \square\end{pmatrix} = (٣\ \ ٢)\begin{pmatrix}٤\\ ٥\end{pmatrix}$

ب أ $= \begin{pmatrix}١٢ & ٨\\ ١٥ & ١٠\end{pmatrix}$

حاصل الضرب أ ب $= (٣\ \ ٢)\begin{pmatrix}٤\\ ٥\end{pmatrix} = (٢٣)$

حاصل الضرب ب أ $= \begin{pmatrix}٤\\ ٥\end{pmatrix}(٣\ \ ٢) = \begin{pmatrix}١٢ & ٨\\ ١٥ & ١٠\end{pmatrix}$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حاصلا الضرب أ ب ، ب أ

ليسا متساويَين.

أي أن ترتيب

الضرب يؤثر في النتيجة.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

ضرب مصفوفة في أخرى

الجزء الثالث

مصفوفة من الرتبة (٢ x ٢) X مصفوفة من الرتبة (٢ x ٢)

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

$\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ x ٢

$\underline{ں} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ x ٢

يمكننا إيجاد حاصلَي الضرب ل ں ، ں ل

حاصلا الضرب هما مصفوفة مربّعة من الرتبة ٢ x ٢

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

لإيجاد كل عنصر في ل ں وكل عنصر

في ں ل، نضرب صفًا من المصفوفة الأولى في

عمود من المصفوفة الثانية

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حاصل الضرب ل و

$$\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} ، \quad \underline{و} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

ل و — و — ل

الصف ١ x العمود ١

$$\begin{pmatrix} \square & ١٤ \\ \square & \square \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$$

الصف ١ x العمود ٢

$$\begin{pmatrix} -٥ & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$$

الصف ٢ x العمود ١

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & ١٥ \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$$

الصف ٢ x العمود ٢

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ -١٤ & \square \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\underline{ل}\,\underline{و} = \begin{pmatrix} -٥ & ١٤ \\ -١٤ & ١٥ \end{pmatrix}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

حاصل الضرب و ل

$$\underline{و} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} ، \quad \underline{ل} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$$

و ل — ل — و

الصف ١ x العمود ١

$$\begin{pmatrix} & \square \\ & \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

الصف ١ x العمود ٢

$$\begin{pmatrix} \square & \\ & \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

الصف ٢ x العمود ١

$$\begin{pmatrix} & \\ & \square \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

الصف ٢ x العمود ٢

$$\begin{pmatrix} & \\ \square & \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$\underline{و}\,\underline{ل} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} ؟$$

حاصل الضرب و ل

$$\underline{و} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} ،\quad \underline{ل} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$$

الصف ١ × العمود ١: $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ٠ & \\ & \end{pmatrix}$

الصف ١ × العمود ٢: $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & ١١ \\ & \end{pmatrix}$

الصف ٢ × العمود ١: $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & \\ ١١ & \end{pmatrix}$

الصف ٢ × العمود ٢: $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & \\ & ٠ \end{pmatrix}$

$$\underline{و}\ \underline{ل} = \begin{pmatrix} ٠ & ١١ \\ ١١ & ٠ \end{pmatrix}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

تلخيص

$$\underline{ل}\ \underline{و} = \begin{pmatrix} ١٤ & -٥ \\ ١٥ & -١٤ \end{pmatrix} ،\quad \underline{و}\ \underline{ل} = \begin{pmatrix} ٠ & ١١ \\ ١١ & ٠ \end{pmatrix}$$

إذا بدلنا ترتيب الضرب للمصفوفتَين، نحصل على نتيجة مختلفة.

∴ في المصفوفات $\underline{ل}\ \underline{و} \neq \underline{و}\ \underline{ل}$

نقول إن عملية ضرب المصفوفات **غير إبدالية**.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الوحدة السابعة

معكوس المصفوفة

العرض التوضيحي الإلكتروني ٧-٢

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

إيجاد

معكوس مصفوفة مربعة من

الرتبة ٢ X ٢

والتحقق منه

أوجِد معكوس أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

أولاً أوجِد محدد أ

| أ | = ٧ x ٤ – ٣ x (–٢) = ٣٤

يمكن إيجاد معكوس المصفوفة أ لأن المحدد لا يساوي صفرًا.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

- بدّل العناصر على القطر الرئيسي
- اضرب العناصر على القطر الثانوي في العدد −١

بالنسبة إلى $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

نحصل على $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

معكوس $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ هو

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$$

يمكننا التحقق من هذا لأن $\underline{أ}^{-١}\,\underline{أ}$

يجب أن يساوي

المصفوفة المحايدة $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

$$\underline{أ}^{-١}\,\underline{أ} = \frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٢٨ + ٦ & ١٢ - ١٢ \\ ١٤ - ١٤ & ٦ + ٢٨ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٣٤ & ٠ \\ ٠ & ٣٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

أوجِد معكوس

$$\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} -٣ & ٦ \\ ٤ & -٧ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ -٥ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ج}} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٨ & ١٠ \\ -٤ & -٦ \end{pmatrix}$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الإجابات

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}^{-١} = -\frac{١}{١١}\begin{pmatrix} -٦ & -٥ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} \text{ أو } \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ -٧ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ج}}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة السابعة : المصفوفات

إجابات معرفة قبلية

١) أ ٥٩ ب −٣٩ ج −٢
د ٥٤ هـ −١٧٩

٢) أ ك = ٧٧
ب ك = $\frac{٧}{٦}$

تمارين ٧-١

١) أ مصفوفة صفرية ومصفوفة صفية
ب مصفوفة مربعة
ج ب، و
د لكلَيهما صفان
هـ المصفوفة أ : ٢ × ٢
المصفوفة ب : ٢ × ١
المصفوفة ج : ١ × ٢
المصفوفة د : ٢ × ٣
المصفوفة هـ : ١ × ٣
المصفوفة و : ٣ × ١
و −٢
ز الصف الثاني، العمود الأول

٢) أ = ١، ب = ١٣، ج = −٤، د = ٥

٣) س = ٦، ص = ٠,٥

٤) ل = ٧، ق = −٢

٥) أ ٧٢
ب ٧
ج مصفوفة صفية (١ × ٤٩) أو مصفوفة عمودية (٤٩ × ١) أو مصفوفة مربعة (٧ × ٧)، لأن ١، ٧، ٤٩ هي العوامل الوحيدة للعدد ٤٩

تمارين ٧-٢

١) أ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٢ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

ج غير ممكن

د $\begin{pmatrix} -٤ & ٩ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ -٢,٤ & ١,٨ \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} -١١ & ٦ \\ ١٢ & ٧ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} -٣,٦ & ٢,٦ \\ ٠,٧ & -٢,٧ \end{pmatrix}$

٢) أ = −٣، ب = −٢، ج = ١٥، د = ٨

٣) ل = ١، ق = −٨، ر = ٧، ت = ١٣

٤) أ $\begin{pmatrix} -٦ & ٤ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٥٧ & ٣٤ \\ ١٧ & ٣٨ \end{pmatrix}$

٥) أ = ٢٠، ب = ١٤، ج = −١٩، د = −٢

تمارين ٧-٣أ

١) أ $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٨ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٣٠ & -١٠ & ١٠ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٢١ & ٧ \\ -١٤ & ٠ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & ٦ \\ ٤,٥ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٨ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

٢) أ $\begin{pmatrix} -٥ \\ -١ \\ ١٥ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} -٨ & ١٠ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$

ج غير ممكن

د $\begin{pmatrix} -٧ \\ -٤ \\ ٣٩ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٣٦ & -٤٢ \\ -١٩ & -٩ \end{pmatrix}$

و غير ممكن

ز $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٨ \\ -١٠ & ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

٣) أ $\begin{pmatrix} -٢٤ & ١٧ \\ -٧ & -١١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٦٦ & -٥٨ \\ -٢٢ & ٣٤ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ -٥ & -١ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} -٢٨,٥ & -٢٦ \\ -١٣ & ١٥ \end{pmatrix}$

٤) أ ك = $\frac{٢}{٣}$ ب ك = ١٥

ج ك = −١,٥

٥) أ س = −٢، ص = ٤,٥

ب أ = ٤٠، ب = ٢، ج = −$\frac{٥}{٢}$

ج ل = −٥، ق = ٥، ر = −٣، ت = $\frac{٤}{٣}$

٦) أ = ٧، ب = −$\frac{٩}{٤}$، ج = −٦، د = −$\frac{١}{٢}$

تمارين ٧-٣ب

١) أ (٢٢) ب (١٨)

ج (٣٤) د (١٤)

هـ (−٢٥) و (٠)

٢) أ $\begin{pmatrix} ١٥ & ١٠ \\ ١٢ & ٨ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٦ & ١٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٣٠ & ٤٠ \\ -٤٢ & -٥٦ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٠ & -١٥ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & ٨ & ١٠ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ -٤ & ٠ \\ -٦ & ٠ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} -١٣,٥ \\ ١٨ \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

٣) أ $\begin{pmatrix} ٦ & ٧ \\ ١٩ & ١٨ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ١٨ & ١٩ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٩ & ٨ \\ ٩ & ٨ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ١٢ & ١٢ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٦ & ٦٢ \\ -٣٠ & -١٣ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ١٥ & ٤٤ \\ -١٨ & ٧٢ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} ١٠٤ & -٢٦ \\ ٥٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

٤) أ $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -٢٠ & ١٤ \\ ١٦ & ١٤ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٦ & ٠ \\ -١٠٢ & ٦٠ \end{pmatrix}$

٥) أ س = ٧، ص = −٨

ب ل = ٢، ق = $\frac{٣}{٢}$

ج أ = ٧، ب = ٣

د س = −١، ص = ٠، ع = ٤، و = −٤

٦) أ $\underline{ن}^{٢} = \begin{pmatrix} -٢٠ & ٢١ \\ ٢٩ & -١٦ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ٢٥ & ١ \\ ٩ & ١٦ \end{pmatrix}$

ب $\underline{ن}^{٢} - \underline{ن} = \begin{pmatrix} -٢٥ & ٢٢ \\ ٣٢ & -٢٠ \end{pmatrix}$

٧) أ يجب أن يكون عدد الأعمدة في أ مساويًا لعدد الصفوف في ب.

ب أ ب مصفوفة مربعة من الرتبة ١ × ١. ب أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن × ن.

تمارين ٧-٤

١) أ |ل| = ٧، ل غير منفردة

ب |ن| = ٩٣، ن غير منفردة

ج |س| = ١، س غير منفردة

د |ز| = −٤، ز غير منفردة

هـ |ت| = −٣٦، ت غير منفردة

و |ي| = ٠، ي منفردة

ز |ش| = −١,٤٤، ش غير منفردة

ح |و| = ٠، و منفردة

٢) |ك م| = ك^{٢}

٣) أ أ = ٧

ب ب = ٠,٣

ج ج = −١٥

د د = −٦

هـ ص = $-\frac{٩}{٤}$ س

تمارين ٧-٥

١) أ $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ ب $\frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٣ & -٩ \end{pmatrix}$

ج $-\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & -٤ \\ ١ & -٧ \end{pmatrix}$ أو $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ -١ & ٧ \end{pmatrix}$

د لا يوجد معكوس. س منفردة أو |س| = ٠

هـ $\frac{١}{١٢٠}\begin{pmatrix} ١١ & -١٤ \\ -١٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

و $-\frac{١}{٢٩}\begin{pmatrix} -١٩ & -١١ \\ ١٣ & ٦ \end{pmatrix}$ أو $\frac{١}{٢٩}\begin{pmatrix} ١٩ & ١١ \\ -١٣ & -٦ \end{pmatrix}$

٢) أ $\frac{١}{١٤}\begin{pmatrix} -٩ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\frac{١}{٨}\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$

٣) أ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix}$

ب $-\frac{١}{٦}\begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ ٢ & -٧ \end{pmatrix}$

ج ل + ن = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$، |ل + ن| = ١٢ − ١٢ = ٠

بما أن المحدد يساوي صفرًا

∴ فلا يوجد معكوس

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) أ ل = ١٤,٥

ب $\frac{١}{٩٦}\begin{pmatrix} ١٧ & ٢٤ \\ ٣٨ & ٤٨ \end{pmatrix}$

٢) أ = ٥، ب = −٢، ج = ٢٠

٣) ن$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -\frac{٣}{٨} & -\frac{١}{٨} \\ -\frac{٢}{٨} & \frac{٢}{٨} \end{pmatrix}$، |ن$^{-١}$| = $\frac{١}{٨}$

٤) $\frac{١}{٢٥}\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ١١ & -٤ \end{pmatrix}$

٥) أ ل$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$، ن$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٧ & -٩ \end{pmatrix}$

ب ر = $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٩ & -٤ \\ -٩ & ٢٤ \end{pmatrix}$ أو أي مصفوفة مطابقة

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة السابعة: المصفوفات

تمارين ٧-١

١) أ مصفوفة عمودية

ب مصفوفة صفية

ج <u>ع</u>، <u>هـ</u>

د في كلَيهما عنصران

هـ ٣ × ٢

و ٤

ز الصف الأوّل، العمود الثاني

٢) أ = ٥، ب = −٤، ج = ٣,٥، د = −٢

٣) س = ٢,٥، ص = −١

٤) ل = ٩، ق = −٤,٥

٥) أ ٥

ب مصفوفة مربعة

ج ن = ١ أو ٣ أو ٥ أو ١٥

تمارين ٧-٢

١) أ $\begin{pmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{pmatrix}$

ب غير ممكن

ج $\begin{pmatrix} ١٥ & −٢٤ & −٩ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٣ & ٠,٢ \\ ٢,١ & ٢,٣ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٢٠ & ٢٠ \\ ٢٠ & ٢٠ \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ١٦ & −١٦ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} −٨١٠ & ٤٥٠ \\ ٥٥٠ & ٠ \end{pmatrix}$

٢) ل = −١، ق = ٥، ر = ١٢، ت = ٩

٣) أ = ٦، ب = ٢، ج = −٧، د = ٤

٤) أ $\begin{pmatrix} ٣١ & ٩ \\ −٤ & ٢٠ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ١٧ & −١٢ \\ ١٢ & ٣٠ \end{pmatrix}$

٥) ل = ٥، ق = −٤، ر = −٠,٥، ت = ٣,٥

تمارين ٧-٣أ

١) أ $\begin{pmatrix} −٦ \\ ٧ \\ ٢ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٨ & ٥ \\ −٥ & −٧ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} −١٧ \\ ١٧ \\ ٨ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٤٠ & ٣ \\ ٥٢ & −٢ \end{pmatrix}$

هـ غير ممكن

و $\begin{pmatrix} −١٥ & ٠ & −١٢,٥ \\ ١٧,٥ & ٢,٥ & ٧,٥ \end{pmatrix}$

ز غير ممكن

٢) أ $\begin{pmatrix} ١٤ & −١٨ \\ −٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} −١٨ & ٢٩ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٠ & ٤,١ \\ −١,٨ & ٥,٩ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} −١١ & ١٣,٨٥ \\ ١,٧ & −٤,٣٥ \end{pmatrix}$

٣) أ ك = $\frac{٥}{٢}$ ب ك = $\frac{١}{٢}$

ج ك = $-\frac{٢}{٣}$

٤) أ س = −٤، ص = ٣

ب أ = ٣، ب = ١٢، ج = ٤

ج ل = ٥، ق = ٢٩، ر = $\frac{١}{٣}$، ت = −٦٠

٥) أ = $\frac{٣٢}{٣}$، ب = −١٢، ج = $-\frac{٨}{٣}$

٦) أ = $\frac{١٣}{٢}$، ب = −٢١، ج = $-\frac{١٦}{٣}$، د = −١١

تمارين ٧-٣ب

١) أ (٧) ب (١٧)

ج (−٦) د (−٤)

هـ (١٠) و (−٧٠)

٢) أ $\begin{pmatrix} -٦ & -٢١ \\ ١٠ & ٣٥ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٤ & -٤ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٤ & -١٠ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ١٢ & -٩ \\ -١٢ & ٩ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ٣ & -٩ \\ -١ & ٣ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} -١٠ & ٤ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

٣) أ $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ١٠ & ٢٤ \\ ١٠ & ٢٤ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ١٨ & ١٨ \\ ١٦ & ١٦ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٦٢ & ٤ \\ -١٣ & -٢٠ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -٥٦ & -٣٣ \\ ٣٧ & ٣٠ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

٤) أ $\begin{pmatrix} -٩ & -١٢ \\ -٧ & ١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} -٧٨ & -٣٠ \\ -٥٢ & -٣٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٠ & -٦ \\ ١٦ & -٢٨ \end{pmatrix}$

٥) أ س = −٣، ص = ٧

ب ل = ٥، ق = −٢

ج أ = ٨، ب = −٣

د و = −١، س = ٥، ص = −٦، ع = ١٦

٦) ك = −٢

٧) أ ق^{٢} = $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-٢)^{٢} & ٠^{٢} \\ ١^{٢} & ٣^{٢} \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٨ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

تمارين ٧-٤

١) أ |ل| = ٥، ل غير منفردة

ب |ن| = ٢٣، ن غير منفردة

ج |ر| = −١٤، ر غير منفردة

د |ز| = ٠، ز منفردة

هـ |ت| = ٦، ت غير منفردة

و |ي| = ٠، ي منفردة

ز |ش| = ٢,٧، ش غير منفردة

ح |و| = ٢,٤، و غير منفردة

٢) أ = −١٣

ب ب = ١١

ج ج = ٥

د د = −١٠

هـ ص = $-\frac{٧}{٦}$ س

تمارين ٧-٥

١) أ $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix}$ ب $-\frac{١}{٥}\begin{pmatrix} -٣ & -٢ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$

ج $\frac{١}{٥}\begin{pmatrix} -٦ & -١ \\ -٧ & -٢ \end{pmatrix}$

د $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ \end{pmatrix}$

هـ $\frac{١}{٣٦}\begin{pmatrix} ١٥ & ١٢ \\ -١٣ & -٨ \end{pmatrix}$

و لا يوجد معكوس. ع منفردة أو |ع| = ٠

٢) أ $\frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

ب $-\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ أو $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) ٥٢

٢) $-\frac{١}{٢٥}\begin{pmatrix} -١ & -٢ \\ ٦ & -١٣ \end{pmatrix}$ أو $\frac{١}{٢٥}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{pmatrix}$

٣) أ $|\underline{س}| = ١٠$ ، $|\underline{ص}| = ١٠$

ب $|\underline{س}^{-١}| = \frac{١}{١٠}$ ، $|\underline{ص}^{-١}| = \frac{١}{١٠}$

ج $|\underline{س}^{-١}\underline{ص}^{-١}| = \frac{١}{١٠٠}$

الوحدة السابعة: حلول تمارين كتاب الطالب

المصفوفات

تمارين ٧-١

١) أ في المصفوفة هـ صف واحد وكل عناصره صفرية، ∴ المصفوفة صفرية والمصفوفة صفية.

ب في المصفوفة أ عدد الصفوف نفسه كما الأعمدة، ∴ هي مصفوفة مربعة.

ج المصفوفتان اللتان فيهما عمود واحد هما ب، و

د لكلَيهما صفان.

هـ المصفوفة أ فيها صفان وعمودان، ∴ الرتبة هي المصفوفة ب فيها صفان وعمود واحد ∴ الرتبة هي ٢ × ١

المصفوفة ج فيها صف واحد وعمودان، ∴ الرتبة هي ١ × ٢

المصفوفة د فيها صفان وثلاثة أعمدة، ∴ الرتبة هي ٢ × ٣

المصفوفة هـ فيها صف واحد وثلاثة أعمدة، ∴ الرتبة هي ١ × ٣

المصفوفة و فيها ثلاثة صفوف وعمود واحد، ∴ الرتبة هي ٣ × ١

و ٢-

ز العنصر ٣ هو في الصف الثاني، العمود الأول.

٢) العناصر في المواقع المتناظرة متساوية.

أ + ٧ = ٨ ∴ أ = ١

ب − ٤ = ٩ ∴ ب = ١٣

١٢ = ١ − ٣ج ∴ ج = −٤

٩ = ٢د − ١ ∴ د = ٥

٣) العناصر في المواقع المتناظرة متساوية.

٢س − ٣ = س + ٣ ∴ س = ٦

٧ − ٤ص = ٩ − ٨ص ∴ ص = ٠٫٥

٤) كل العناصر في المصفوفة الصفرية تساوي الصفر.

٢١ − ٣ل = ٠ ∴ ل = ٧

١٠ + ٥ق = ٠ ∴ ق = −٢

٥) عدد العناصر = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

أ ل فيها ٨ × ٩ = ٧٢ عنصرًا

ب ن فيها ٢٨ ÷ ٤ = ٧ أعمدة

ج العوامل الوحيدة للعدد ٤٩ هي ١، ٧، ٤٩

٤٩ = ١ × ٤٩ ∴ س يمكن أن تكون مصفوفة صفية (فيها ٤٩ عمودًا)

٤٩ = ٤٩ × ١ ∴ س يمكن أن تكون مصفوفة عمودية (فيها ٤٩ صفًا)

٤٩ = ٧ × ٧ ∴ س يمكن أن تكون مصفوفة مربعة (فيها ٧ صفوف، و٧ أعمدة)

تمارين ٧-٢

١) أ $\begin{pmatrix} -٥ \\ ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ \\ -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥+٧ \\ ٧+(-٥) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٢ \end{pmatrix}$

ب $(٨ \quad ٠ \quad ١١) - (٤ \quad -٣ \quad -١) = (٨-٤ \quad ٠-(-٣) \quad ١١-(-١)) = (٤ \quad ٣ \quad ١٢)$

ج ليس للمصفوفتَين الرتبة نفسها ∴ الجمع غير ممكن.

د $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٤ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & -٦ \\ ٧ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤+٥ & ٢+(-٦) \\ -٤+٧ & ١+٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٤ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ١,٥+٣,٥ & ٢,٨+٤,٢ \\ -٦,٣+٨,١ & -٠,٧+(-١,٧) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ١,٨ & -٢,٤ \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} ١ & -٥ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٥ & ٦ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١-(-٥) & -٥-٦ \\ ٧-٠ & ١٠-(-٢) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -١١ \\ ٧ & ١٢ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} ٠,٦ & -١,٩ \\ -٢,٧ & ٠,٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ١,٧ \\ ٠ & -٠,٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٦-(-٢) & -١,٩-١,٧ \\ -٢,٧-٠ & ٠,٥-(-٠,٢) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢,٦ & -٣,٦ \\ -٢,٧ & ٠,٧ \end{pmatrix}$

٢) $\begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ -٦ & -٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب}+٢ \\ \text{ج} & ٢\text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٨ \\ ٩ & ٧ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ١١+\text{أ} & ٨+\text{ب}+٢ \\ -٦+\text{ج} & -٩+٢\text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٨ \\ ٩ & ٧ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{أ}+١١ & \text{ب}+١٠ \\ \text{ج}-٦ & ٢\text{د}-٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٨ \\ ٩ & ٧ \end{pmatrix}$

العناصر في المواقع المتناظرة متساوية.

$\text{أ} + ١١ = ٨ \quad \therefore \text{أ} = -٣$

$\text{ب} + ١٠ = ٨ \quad \therefore \text{ب} = -٢$

$\text{ج} - ٦ = ٩ \quad \therefore \text{ج} = ١٥$

$٢\text{د} - ٩ = ٧ \quad \therefore \text{د} = ٨$

٣) $\begin{pmatrix} \text{ل} & -٥ \\ ١٧ & ٣\text{ر} - ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٧ & \text{ق} \\ \text{ت} + ٩ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{ل} - ٧ & -٥ - \text{ق} \\ ١٧ - (\text{ت} + ٩) & ٣\text{ر} - ٤ - ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{ل} - ٧ & -٥ - \text{ق} \\ -\text{ت} + ٨ & ٣\text{ر} - ١٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

العناصر في المواقع المتناظرة متساوية.

$\text{ل} - ٧ = -٦ \quad \therefore \text{ل} = ١$

$-\text{ق} - ٥ = ٣ \quad \therefore \text{ق} = -٨$

$٣\text{ر} - ١٩ = ٢ \quad \therefore \text{ر} = ٧$

$-\text{ت} + ٨ = -٥ \quad \therefore \text{ت} = ١٣$

٤) أ $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ + ٢ & -٣ + (-٣) \\ ١ + ١ & ٤ + ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١٢ & ١٨ \\ ١٣ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ١٨ \\ ١٣ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & ١٨ \\ ١٣ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٥٤ \\ ٣٩ & ٢١ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٣٦ & ٥٤ \\ ٣٩ & ٢١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ - ٢ & ٥٤ - (-٣) \\ ٣٩ - ١ & ٢١ - ٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣٤ & ٥٧ \\ ٣٨ & ١٧ \end{pmatrix}$

٥) $\begin{pmatrix} ١٥ & ١٢ \\ -٩ & ٢١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٥ & ١٢ \\ -٩ & ٢١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ ٢\text{ج} & ٤\text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٠ \\ ٢٠ & ٥٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ١٥ + ١٥ - \text{أ} & ١٢ + ١٢ - \text{ب} \\ -٩ - ٩ - ٢\text{ج} & ٢١ + ٢١ - ٤\text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٠ \\ ٢٠ & ٥٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٣٠ - \text{أ} & ٢٤ - \text{ب} \\ -١٨ - ٢\text{ج} & ٤٢ - ٤\text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٠ \\ ٢٠ & ٥٠ \end{pmatrix}$

العناصر في المواقع المتناظرة متساوية.

٣٠ − أ = ١٠ ∴ أ = ٢٠

٢٤ − ب = ١٠ ∴ ب = ١٤

−١٨ − ٢ج = ٢٠ ∴ ج = −١٩

٤٢ − ٤د = ٥٠ ∴ د = −٢

تمارين ٧-٣أ

١) أ $\begin{pmatrix} ٦ \\ ٨ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١٠ & -١٠ & ٣٠ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٧ & ٢١ \\ ٠ & -١٤ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٤,٥ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٨ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

٢) أ $\begin{pmatrix} ٢ \times ٣ - ١١ \\ ٢ \times (-٢) - (-٣) \\ ٢ \times ٩ - ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ \\ -١ \\ ١٥ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٣ \times ٤ - ٢ & ٣ \times (-٧) + ١٣ \\ ٣ \times ٣ - ٦ & ٣ \times (-٢) + ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -٨ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix}$

ج ليس للمصفوفتَين ب، و الرتبة نفسها، ∴ العملية غير ممكنة.

د $\begin{pmatrix} -١٦ \\ ٢ \\ ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٩ \\ -٦ \\ ٢٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ \\ -٤ \\ ٣٩ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} -٣٠ & ٥ \\ ٠ & -٢٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٢ & -٢١ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤٢ & ٢٦ \\ -٩ & -١٩ \end{pmatrix}$

و ليس للمصفوفات أ، ج، ب جميعًا الرتبة نفسها، ∴ العملية غير ممكنة.

ز $\begin{pmatrix} \frac{٢}{٣} \times ١٢ & \frac{٢}{٣} \times ٠ & \frac{٢}{٣} \times ٣ \\ \frac{٢}{٣} \times (-٣) & \frac{٢}{٣} \times ٦ & \frac{٢}{٣} \times (-١٥) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٠ & ٢ \\ -٢ & ٤ & -١٠ \end{pmatrix}$

٣) أ $\begin{pmatrix} ٢ \times (-٨) + ٣٣ & ٢ \times ٦ - ٣٦ \\ ٢ \times ٤ - ١٩ & ٢ \times (-١٢) + ١٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ & -٢٤ \\ -١١ & -٧ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} -٨ & ٦ \\ ٤ & -١٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥٠ & -٦٠ \\ -٣٠ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥٨ & ٦٦ \\ ٣٤ & -٢٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ٥ & -٦ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -١ & -٥ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} -٦ & ٤,٥ \\ ٣ & -٩ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢٠ & -٢٤ \\ -١٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٦ & -٢٨,٥ \\ ١٥ & -١٣ \end{pmatrix}$

٤) أ ٦ = ٩ك، ∴ ك = ٦ ÷ ٩ = $\frac{٢}{٣}$ أو −١٦ = −٢٤ك، ∴ ك = −١٦ ÷ (−٢٤) = $\frac{٢}{٣}$

ب ١٨ = ١,٢ك، ∴ ك = ١٨ ÷ ١,٢ = ١٥ أو ٥١ = ٣,٤ك، ∴ ك = ٥١ ÷ ٣,٤ = ١٥

ج −٦ = ٤ك، ∴ ك = −٦ ÷ ٤ = −١,٥ أو ٥,١ = −٣,٤ك، ∴ ك = ٥,١ ÷ −٣,٤ = −١,٥

٥) أ ٢س + ٢٠ = ١٦ ∴ س = −٢

٧ + ٤ص = ٢٥ ∴ ص = ٤,٥

ب $\frac{١}{٢}$ أ −١٨ = ٢ ∴ أ = ٤٠

−٤ + ٢ب = ٠ ∴ ب = ٢

٦ − ٦ج = ٢١ ∴ ج = −$\frac{٥}{٢}$

ج −١٣ − ١٢ = ٥ل ∴ ل = −٥

ق − ٢ = ٣ ∴ ق = ٥

٩ − ٢ر = ١٥ ∴ ر = −٣

ز + ٤ = ٤ز ∴ ز = $\frac{٤}{٣}$

٦) $٤\begin{pmatrix} أ & ب \\ -٥ & ٨ \end{pmatrix} = ٣\begin{pmatrix} ٤ & ١٥ \\ -٣ & ج \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٩ & -٦ \\ د & ٥ \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} ١١ & ٢٤ \\ -١٤ & ٢ \end{pmatrix}$

٤أ + ١٢ − ١٨ = ٢٢ ∴ أ = ٧

٤ب + ٤٥ + ١٢ = ٤٨ ∴ ب = −$\frac{٩}{٤}$

٣٢ + ٣ج − ١٠ = ٤ ∴ ج = −٦

−٢٠ − ٩ − ٢د = −٢٨ ∴ د = −$\frac{١}{٢}$

تمارين ٧-٣ب

١)

أ $(٢ \times ٥ + ٣ \times ٤) = (٢٢)$

ب $(٤ \times ٦ + (-٢) \times ٣) = (١٨)$

ج $((-٧) \times (-٤) + (-٣) \times (-٢)) = (٣٤)$

د $(٣ \times ٣ + ٢ \times ٢ + ١ \times ١) = (١٤)$

هـ $(٢ \times ٤ + (-٣) \times ٩ + ٦ \times (-١)) = (-٢٥)$

و $(٤ \times ٢ + ٢ \times (-٢) + (-٤) \times ١) = (٠)$

٢)

أ $\begin{pmatrix} ٥ \times ٢ & ٥ \times ٣ \\ ٤ \times ٢ & ٤ \times ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ١٥ \\ ٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٦ \times ٤ & ٦ \times (-٢) \\ ٣ \times ٤ & ٣ \times (-٢) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ١٢ & -٦ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} -٥ \times -٨ & -٥ \times -٦ \\ ٧ \times -٨ & ٧ \times -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٠ & ٣٠ \\ -٥٦ & -٤٢ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٠{,}٥ \times -٦ & ٠{,}٥ \times ٤ \\ ٢{,}٥ \times -٦ & ٢{,}٥ \times ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -١٥ & ١٠ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ١ \times ٥ & ١ \times ٤ & ١ \times ٣ \\ ٢ \times ٥ & ٢ \times ٤ & ٢ \times ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} ١ \times ٠ & ١ \times -٢ \\ ٢ \times ٠ & ٢ \times -٢ \\ ٣ \times ٠ & ٣ \times -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ ٠ & -٤ \\ ٠ & -٦ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} ٥ \times (-٢{,}٧) + ٠ \times ٣{,}٦ \\ ٠ \times (-٢{,}٧) + ٥ \times ٣{,}٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٣{,}٥ \\ ١٨ \end{pmatrix}$

ح $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} \times ٢ + \left(-\frac{٥}{٢}\right) \times ٠ & \frac{٣}{٢} \times ٠ + \left(-\frac{٥}{٢}\right) \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \end{pmatrix}$

٣)

أ $\begin{pmatrix} ١ \times ٣ + ٢ \times ٢ & ١ \times ٤ + ٢ \times ١ \\ ٤ \times ٣ + ٣ \times ٢ & ٤ \times ٤ + ٣ \times ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ١٨ & ١٩ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٣ \times ١ + ٤ \times ٤ & ٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ \\ ٢ \times ١ + ١ \times ٤ & ٢ \times ٢ + ١ \times ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩ & ١٨ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ١\times٥+١\times٣ & ١\times٧+١\times٢ \\ ١\times٥+١\times٣ & ١\times٧+١\times٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٩ \\ ٨ & ٩ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٥\times١+٧\times١ & ٥\times١+٧\times١ \\ ٣\times١+٢\times١ & ٣\times١+٢\times١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١٢ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٧\times٩+(-١)\times١ & ٧\times٠+(-١)\times(-٦) \\ -٢\times٩+٥\times١ & -٢\times٠+٥\times(-٦) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦٢ & ٦ \\ -١٣ & -٣٠ \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} -١\times٨+١٣\times٤ & -١\times(-٢)+١٣\times١ \\ ٩\times٨+٠\times٤ & ٩\times(-٢)+٠\times١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٤ & ١٥ \\ ٧٢ & -١٨ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} ٨\times-١+(-٢)\times٩ & ٨\times١٣+(-٢)\times٠ \\ ٤\times(-١)+١\times٩ & ٤\times١٣+١\times٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٦ & ١٠٤ \\ ٥ & ٥٢ \end{pmatrix}$

ح $\begin{pmatrix} ١\times(-٣)+٠\times٧ & ١\times٢+٠\times٤ \\ ٠\times(-٣)+١\times٧ & ٠\times٢+١\times٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

٤) أ $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤\times١+٠\times(-٥) & ٤\times٢+٠\times٣ \\ ٠\times١+(-٢)\times(-٥) & ٠\times٢+(-٢)\times٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٨ \\ ١٠ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \times ٢ \begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ & ١٢ \\ -٢ & ٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١\times٦+(-٤)\times(-٢) & ١\times١٢+(-٤)\times٨ \\ ٢\times٦+(-١)\times(-٢) & ٢\times١٢+(-١)\times٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & -٢٠ \\ ١٤ & ١٦ \end{pmatrix}$

ج $\frac{٢}{٣}\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٦ & ١٥ \end{pmatrix} \left[-٣ \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & ١٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٦ & -٩ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢\times٠+٠\times٦ & ٢\times٣+٠\times(-٩) \\ -٤\times٠+١٠\times٦ & -٤\times٣+١٠\times(-٩) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٦ \\ ٦٠ & -١٠٢ \end{pmatrix}$

٥) أ $\begin{pmatrix} ١\times\text{س}+٠\times(-٣) & ١\times٢+٠\times\text{ص} \\ ٠\times\text{س}+١\times(-٣) & ٠\times٢+١\times\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٢ \\ -٣ & \text{ص} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \text{س} & ٢ \\ -٣ & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٣ & -٨ \end{pmatrix}$

س = ٧، ص = −٨

ب $\begin{pmatrix} ٢\text{ل}\times٢+(-٣)\times٢ & ٢\text{ل}\times٠+(-٣)\times٢ \\ ٥\times٢+\text{ق}\times٠ & ٥\times٠+\text{ق}\times٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤\text{ل} & -٦ \\ ١٠ & ٢\text{ق} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ٤\text{ل} & -٦ \\ ١٠ & ٢\text{ق} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٦ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

ل = ٢، ق = $\frac{٣}{٢}$

ج $\begin{pmatrix} ٢\times(\text{أ}+١)+٤\times٥ & ٢\times(-٢)+٤\times(\text{ب}-١) \\ -١\times(\text{أ}+١)+٣\times٥ & -١\times(-٢)+٣\times(\text{ب}-١) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٤ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ٢\text{أ}+٢٢ & ٤\text{ب}-٨ \\ ١٤-\text{أ} & ٣\text{ب}-١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٤ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$$

أ = ٧، ب = ٣

د $\begin{pmatrix} -٢ & -٦ \\ -٤ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{و}+٢ & ٢\text{س}-٤ \\ \text{ص}-٤ & \text{ع}+٥ \end{pmatrix}$

-٢ = و + ٢ ∴ و = -٤

-٦ = ٢ س - ٤ ∴ س = -١

-٤ = ص - ٤ ∴ ص = ٠

٩ = ع + ٥ ∴ ع = ٤

٦) **أ** $\underline{\text{ن}}^٢ = \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -١\times(-١)+٥\times٤ & -١\times٥+٥\times(-٣) \\ ٤\times(-١)+(-٣)\times٤ & ٤\times٥+(-٣)\times(-٣) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢١ & -٢٠ \\ -١٦ & ٢٩ \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{ن}}^٢ = \begin{pmatrix} ٢١ & -٢٠ \\ -١٦ & ٢٩ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ١ & ٢٥ \\ ١٦ & ٩ \end{pmatrix}$$

ب $\underline{\text{ن}}^٢ - \underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٢٠ \\ -١٦ & ٢٩ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٢ & -٢٥ \\ -٢٠ & ٣٢ \end{pmatrix}$

٧) **أ** يجب أن يكون عدد الأعمدة في أ مساويًا لعدد الصفوف في ب.

ب إذا كانت رتبة أ هي ١ × ن تكون رتبة ب هي ن × ١

∴ رتبة أ ب هي ١ × ١، رتبة ب أ هي ن × ن

أ ب مصفوفة مربعة من الرتبة ١ × ١، ب أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن × ن

تمارين ٧-٤

١)
أ |ل| = ٤ × ٣ − ٥ × ١ = ٧، ل غير منفردة

ب |ن| = ٧ × ١١ − (−٢) × ٨ = ٩٣، ن غير منفردة

ج |س| = −٣ × (−٧) − ٥ × ٤ = ١، س غير منفردة

د |ن| = −١٢ × ٥ − ٨ × (−٧) = −٤، ن غير منفردة

هـ |ت| = −٩ × ٢ − ٣ × ٦ = −٣٦، ت غير منفردة

و |ي| = −١٢ × ٦ − (−٩) × ٨ = ٠، ي منفردة

ز |ش| = ٢,٥ × (−٣,٦) − ١,٨ × (−٤,٢) = −١,٤٤، ش غير منفردة

ح |و| = ٤ × ٠,٧٥ × (−٠,٢) × (−١٥) = ٠، و منفردة

٢) محدد $\begin{pmatrix} ك & ٠ \\ ٠ & ك \end{pmatrix}$ يساوي $ك^{٢}$

٣)
أ |أ| = ٦ × ٣ − ٢أ = ٤ ∴ أ = ٧

ب ب = $\begin{pmatrix} ١٠ & -٦ \\ ٨ & ٢ب \end{pmatrix}$

١٠ × ٢ب − (−٦) × ٨ = ٥٤

٢٠ب + ٤٨ = ٥٤

ب = ٠,٣

ج ج = $\begin{pmatrix} \frac{٥}{٣} & \frac{ج}{٦} \\ \frac{٤}{٣} & -٢ \end{pmatrix}$، ∴ |ج| = $\frac{٥}{٣} \times (-٢) - \frac{ج}{٦} \times \frac{٤}{٣} = -\frac{١٠}{٣} - \frac{٢ج}{٩}$

$-\frac{١٠}{٣} - \frac{٢ج}{٩} = ٠$

$\frac{٢ج}{٩} = -\frac{١٠}{٣}$

ج = $-\frac{٩٠}{٦} = -١٥$

د ي = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ ١٢ & ٣د \end{pmatrix}$

|ي| = ٦ × ٣د − (−٩) × ١٢ = ١٨د + ١٠٨

١٨د + ١٠٨ = ٠، د = −٦

هـ $\underline{هـ} = \begin{pmatrix} س & ص \\ -٤ & ٩ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س-٣ص & ٢س+٤ص \\ -٣١ & ٢٨ \end{pmatrix}$

$|\underline{هـ}| = ٢٨ \times (س - ٣ص) - (-٣١) \times (٢س + ٤ص) = ٩٠س + ٤٠ص$

$٩٠س + ٤٠ص = ٠$ ، $ص = -\frac{٩}{٤}س$

تمارين ٧-٥

١) **أ** $|\underline{ي}| = ٢ \times ٣ - ١ \times ٤ = ٢$ $\therefore \underline{ي}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

ب $|\underline{ش}| = ٣ \times (-٥) - (-٢) \times ٩ = ٣$ $\therefore \underline{ش}^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ -٩ & ٣ \end{pmatrix}$

ج $|\underline{و}| = ١ \times (-٤) - ٠ \times ٩ = -٤$ $\therefore \underline{و}^{-١} = -\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} -٤ & ٠ \\ -٧ & ١ \end{pmatrix}$ أو $\frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٧ & -١ \end{pmatrix}$

د $|\underline{س}| = -٦ \times ٥ - (-١٠) \times ٣ = ٠$ $\therefore$ لا يوجد معكوس. $\underline{س}$ منفردة.

هـ $|\underline{ص}| = -١٨ \times (-١٤) - (-١١) \times (-١٢) = ١٢٠$ $\therefore \underline{ص}^{-١} = \frac{١}{١٢٠}\begin{pmatrix} -١٤ & ١١ \\ ١٢ & -١٨ \end{pmatrix}$

و $|\underline{ع}| = ١٣ \times (-١١) - ١٩ \times (-٦) = -٢٩$ $\therefore \underline{ع}^{-١} = -\frac{١}{٢٩}\begin{pmatrix} -١١ & -١٩ \\ ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$ أو $\frac{١}{٢٩}\begin{pmatrix} ١١ & ١٩ \\ -٦ & -١٣ \end{pmatrix}$

٢) $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

أ $|\underline{أ}| = ٤ \times (-١) - ٩ \times (-٢) = ١٤$ $\therefore \underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١٤}\begin{pmatrix} -١ & -٩ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

ب $|\underline{ب}| = ٦ \times ٣ - ٥ \times ٢ = ٨$ $\therefore \underline{ب}^{-١} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$

٣) $\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

أ $\underline{ل} - \underline{ن} = \begin{pmatrix} ٧-٥ & ٢-٢ \\ ٥-(-٢) & -١-٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٧ & -٣ \end{pmatrix}$

ب $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٧ & -٣ \end{vmatrix} = -٦$ $\therefore (\underline{ل} - \underline{ن})^{-١} = -\frac{١}{٦}\begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ -٧ & ٢ \end{pmatrix}$

ج $\underline{ل} + \underline{ن} = \begin{pmatrix} ٧+٥ & ٢+٢ \\ ٥+(-٢) & -١+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ $\therefore \underline{ل} + \underline{ن}$ منفردة ولا يوجد لها معكوس.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) أ $٧ل - (-١٣)(ل - ٥) = ٢٢٥$

$٢٠ل - ٦٥ = ٢٢٥$

$ل = ١٤{,}٥$

ب $\begin{vmatrix} ٣٨ & -١٧ \\ -٤٨ & ٢٤ \end{vmatrix} = ٣٨ \times ٢٤ - (-١٧) \times (-٤٨)$

$= ٩٦$

المعكوس هو $\frac{١}{٩٦}\begin{pmatrix} ٢٤ & ١٧ \\ ٤٨ & ٣٨ \end{pmatrix}$

٢) $\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} أ & ٤ \\ ٢ب & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٩ & جـ + ٥ \\ ٢جـ - ٨ & أ - ب \end{pmatrix}$

$٧أ - ٢ب = ٣٩$

$٢٨ - ٣ = جـ + ٥ \quad \therefore جـ = ٢٠$

$٤أ - ٦ب = ٢جـ - ٨$

$١٦ - ٩ = أ - ب$

حل المعادلات الآنية المتبقية:

$٧أ - ٢ب = ٣٩$

$٤أ - ٦ب = ٣٢$

$أ - ب = ٧$

$\therefore أ = ٥،\ ب = -٢$

٣) $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & ٠ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$

$|\underline{ن}| = -٢ \times (-١) - ٣ \times (-٢) = ٨$

$\underline{ن}^{-١} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ ٢ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٨} & -\frac{٣}{٨} \\ \frac{٢}{٨} & -\frac{٢}{٨} \end{pmatrix}$

$|\underline{ن}^{-١}| = -\frac{١}{٨} \times \left(-\frac{٢}{٨}\right) - \left(-\frac{٣}{٨}\right) \times \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٨}$

٤) $\underline{أ}^٢ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

$|\underline{أ}^٢| = ١١ \times ٣ - ٢ \times ٤ = ٣٣ - ٨ = ٢٥$

$(\underline{أ}^٢)^{-١} = \frac{١}{٢٥}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ١١ \end{pmatrix}$

٥) أ $|\underline{ل}| = ٥ \times ٤ - (-٣) \times ٦ = ٢$

$\therefore \underline{ل}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

$|\underline{ن}| = \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix} = ٧ \times ٤ - ٣ \times ٩ = ١$

$\therefore \underline{ن}^{-١} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٩ & ٧ \end{pmatrix}$

ب $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} - ٢\underline{س} = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٩ & ٧ \end{pmatrix}$

$٢\underline{س} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٩ & ٧ \end{pmatrix}$

$٢\underline{س} = \begin{pmatrix} ٢ & ١{,}٥ \\ ٣ & ٢{,}٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٩ & ٧ \end{pmatrix}$

$\underline{س} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٢ & ٤{,}٥ \\ ١٢ & -٤{,}٥ \end{pmatrix}$

أو أي مصفوفة مطابقة.

الوحدة الثامنة

التباديل والتوافيق Permutations and combinations

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	مصادر أخرى	المفردات
٨-١ مضروب العدد	٨-١ يحسب مضروب العدد باستخدام الحاسبة وبدون استخدامها. ٨-٢ يبسّط عبارات تتضمن مضروب العدد.	٣	استكشف ١ الأمثلة ١، ٢، ٣ تمارين ٨-١		مضروب العدد
٨-٢ التباديل					التباديل
٨-٢أ تباديل ن من العناصر المختلفة	٨-٣ يحسب عدد التباديل لـ ر من العناصر من أصل ن من العناصر (حيث ر ⩽ ن). ٨-٦ يستخدم التباديل والتوافيق كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية ويفسرها.	٣	المثالان ٤، ٥ تمارين ٨-٢أ	شريحة العرض الإلكتروني ٨-١	مختلفة
٨-٢ب تباديل ن من العناصر بعضها متشابه	٨-٤ يحسب عدد التباديل لـ ن من العناصر المختلفة، مع أو بدون عناصر متكررة (متشابهة). ٨-٦ يستخدم التباديل والتوافيق كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية ويفسرها.	٣	المثالان ٦، ٧ تمارين ٨-٢ب		متشابه (مكرر)
٨-٢ج تباديل ن من العناصر المختلفة بوجود القيود	٨-٤ يحسب عدد التباديل لـ ن من العناصر المختلفة، مع أو بدون عناصر متكررة (متشابهة). ٨-٦ يستخدم التباديل والتوافيق كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية ويفسرها.	٣	الأمثلة ٨، ٩، ١٠ تمارين ٨-٢ج	شريحة العرض الإلكتروني ٨-٢	قيود
٨-٢د تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة	٨-٤ يحسب عدد التباديل لـ ن من العناصر المختلفة، مع أو بدون عناصر متكررة (متشابهة). ٨-٦ يستخدم التباديل والتوافيق كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية ويفسرها.	٣	الأمثلة ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥ تمارين ٨-٢د		
٨-٣ التوافيق	٨-٥ يحسب عدد التوافيق لـ ر من العناصر من أصل ن من العناصر المختلفة. ٨-٦ يستخدم التباديل والتوافيق كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية ويفسرها.	٤	استكشف٢، استكشف ٣، الأمثلة ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١ تمارين ٨-٣		التوافيق اختيارات مستقلة، اختيارات متمايزة
تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة		٣			

٨-١ مضروب العدد

المفردات

مضروب العدد الصحيح الموجب ن: هو حاصل ضرب كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي ن.

ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن عدد صحيح > ٠

ملاحظات للمعلّمين

هذه فرصة لحث الطلبة على استكشاف المفهوم الجديد (مضروب العدد) باستخدام الحاسبة، والذي يمكن أن يتم في مجموعات أو كنشاط لجميع طلبة الصف.

يمكنك تنفيذ نشاط جلوس الطلبة على المقاعد في الصف بحيث تبيّن لهم:

أن هناك طريقة واحدة لجلوس طالب واحد على مقعد واحد، وأن هناك طريقتَين لجلوس طالبين على مقعدين، ثم ست طرق لجلوس ثلاثة طلاب على ثلاثة مقاعد.

يمكن بعد ذلك الطلب إلى الطلبة إيجاد عدد الطرق التي يجلس فيها أربعة طلاب على أربعة مقاعد.

تحقق من أن كل طالب في الصف يمكنه إيجاد مفتاح n! أو ×! على الحاسبة.

أفكار للتعليم

الخطوات الآتية هدفها جعل الطلبة يكتشفون بعض الأنماط في قيم مضروب الأعداد الصحيحة الموجبة.

١) مستخدمًا الأعداد الصحيحة، اجعل الطلبة يبدأون بالعدّ تصاعديًا بدءًا من إدخال القيمة ن = ١ لإيجاد قيم ١!، ٢!، ٣!...

أنشئ جدول نتائج مع تقدمك في العمل، واطرح الأسئلة التالية على الطلبة:

متى يمكنك أن تبدأ برؤية النمط الذي ينتج من العملية؟

هل يمكنك كتابة القيمة التالية من دون استخدام الحاسبة؟

٢) ماذا يحصل لقيم المضروب؟ ومتى تصبح القيم كبيرة لدرجة لا نستطيع كتابتها من دون استخدام الصيغة العلمية للتعبير عن القيمة (الصيغة القياسية)؟

٣) هل يمكنك إيجاد طريقة ممنهجة للانتقال مثلًا من، ٧! = ٥٠٤٠ إلى ١! = ١ في الجدول الذي أنشأته؟ وهل يمكنك التنبؤ بقيمة ٠! ؟

ما هي القيم التي تعطيها الحاسبة لـ ٠! ؟ هذه حالة خاصة.

الصيغة ن! تنطبق فقط عندما ن > ١، ولا تنطبق عندما ن = ٠

٤) ماذا يحصل مع (−١)! ؟ وهل تتعرف الحاسبة على مضروب الأعداد السالبة، أو العشرية، أو الكسرية مثل $\left(\frac{٤}{٥}\right)$! أو ٠,٨! ؟

٥) لخص النتائج كما في الدرس ٨-١

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ١

العملية الصحيحة لإيجاد عدد المسارات هي الضرب: ١ × ٢ × ٣ = ٦

من اليمين إلى اليسار، عدد الخيارات أو النواتج هو ١ ويليه ٢ ويليه ٣

لاحظ أن ترتيب الأعداد عند ضربها ليس مهمًا.

دعم الطلبة

ركّز مع الطلبة على أن مفهوم مضروب العدد يتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة فقط.

تساعد الأمثلة من ١ إلى ٣ الطلبة على القيام بالحسابات مع أو بدون استخدام الحاسبة، وكيف يمكن استخدام المضروب للتعبير عن حاصل ضرب الأعداد الصحيحة المتتابعة.

تحدّي الطلبة

تساعد نافذة Factorial Calculator n! (http://www.cambridge.org/links/mctd6860) في موقع www.cambridge.org/links/mctd6860 الطلبة على تجربة رمز المضروب بأنفسهم باستخدام الحاسبة على الموقع، كما يشرح الموقع هذا ماهية المضروب بما يتعلق بعدد التراتيب ويقدم أمثلة على شكل أعداد وعلى شكل أسئلة مراجعة الوحدة لأولئك الطلبة المستعدين للانتقال إلى مرحلة أعلى من التعامل مع المضروب، ويحضّرهم لاستيعاب الدرس الآتي من هذه الوحدة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨–١

٨-٢ التباديل

يوجد في هذا الدرس عدد من المفاهيم التي تتطلب معالجة منفردة، لذا تم تقسيمه إلى عدة أجزاء.

المفاهيم التي يتم تناولها في هذا الدرس هي تباديل لكل من:

١) ن عناصر مع التكرار (والتي تتضمن عناصر ليست كلها مختلفة).

٢) ن عناصر مختلفة مع وجود قيود (حيث تكون التباديل مقيدة بشروط معيّنة).

٣) ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة (حيث لا نطبق التباديل لكل العناصر ن، ولكن نطبقها على ر عناصر منها فقط).

وعليك اتباع التسلسل التالي لتحقيق الأهداف:

٨-٢أ تباديل ن من العناصر المختلفة

المفردات

التباديل: التراتيب المختلفة التي يمكن بها أن نختار العناصر ونرتبها.

مختلفة: نصف مجموعة عناصر بأنها مختلفة إذا لم يكن أي منها مطابقًا للآخر.

ملاحظات للمعلّمين

يوجد عدد من المفاهيم في هذا الدرس يفضّل التعامل معها بشكل منفصل. في الفقرة التالية "أفكار للتعليم" ترد طريقة مقترحة للتقدّم.

أفكار للتعليم

هذه فرصة أخرى لبحث يرتبط ارتباطًا وثيقًا بما سبقه، حيث يلتفت الطلبة إلى عدد الطرق التي يمكنهم من خلالها الجلوس على ن كراسي.

العمل ضمن ثنائيات يساعد الطلبة على الانتباه إلى الطريقة الممنهجة التي يتم استخدامها؛ أما إذا لم يفطنوا للأمر، فيمكنك تقديم التوجيهات الإرشادية التالية:

١) بكم طريقة يمكنك ترتيب الحرفَين أ، ب في صف؟ بطريقتَين (أ ب، ب أ).

٢) بانتقالك إلى الأحرف أ ب ج، كيف يمكنك القيام بهذا بشكل ممنهج بحيث تضمن تغطية كل التراتيب؟ ٦ طرق (أ ب ج، أ ج ب، ب أ ج، ب ج أ، ج أ ب، ج ب أ).

٣) أنشئ جدولًا للنتائج.

٤) انتقل إلى الأحرف أ ب ج د، حيث من الضروري هنا أن تستخدم طريقة ممنهجة لإيجاد التراتيب: ٢٤ طريقة (٦ تبدأ بكل من الأحرف أ ب، ج، د).

٥) هل يمكنك رؤية النمط الذي بدأ يظهر؟

٦) هل يمكنك كتابة صيغة لعدد التراتيب الممكنة لـ ن حرف؟

ملاحظة: تم تلخيص هذه التوجيهات والإرشادات في شرائح العرض الإلكتروني ٨-١

يمكنك الآن النظر إلى المسألة نفسها في الطريقة المبيّنة في الدرس ٨-٢أ من كتاب الطالب وأن تعرفهم على الرمز ${}^{ن}ل_{ر}$ وعلى مفتاح $\boxed{{}_nP^r}$ في الحاسبة لتحضرهم للدرس التالي. يمكنهم الآن تجربة حل تمارين ٨-٢أ

دعم الطلبة

إذا احتاج بعض الطلبة إلى مساعدة أو إلى مزيد من التمارين، فإن في موقع Khan Academy اختبارًا مفيدًا ذا أربعة تمارين مع مساعدة وحلول متضمنة تحت عنوان Permutations

(http://www.cambridge.org/links/mctd6861)

تحدّي الطلبة

يسمح Combinations and Permutations Calculator (http://www.cambridge.org/links/mctd6862) للطلبة بالتحقق مما يحصل إذا تصاعد عدد العناصر التي يتم ترتيبها. يجب أن تستخدم الحاسبة حين تكون المدخلتان في الخانتَين 'Types to choose from' (أنواع لتختار منها) و 'Number chosen' (العدد المختار) متساويتَين. يجب أن تضع 'Yes' في خانة 'Is Order Important?' (هل الترتيب ضروري؟)، كما يجب أن تضع 'No' في خانة 'Is Repetition Allowed?' (هل التكرار مسموح؟).

يمكن حساب عدد التباديل، كما يمكن أن تظهر التباديل في نافذة صغيرة عند الضغط على مفتاح 'List'، ويمكن بعد ذلك إغلاقها بالضغط على مفتاح 'Tick'.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨–٢أ

٨-٢ب تباديل ن من العناصر بعضها متشابه

المفردات

مكرر: عندما يظهر العنصر نفسه أكثر من مرة.

ملاحظات للمعلِّمين

يمكن استكتشاف التباديل لـ ن من العناصر مع التكرار كما تم استكشاف التباديل لـ ن من العناصر المختلفة في الدرس السابق.

ومن جهة أخرى، هذه المرة لن تكون كل العناصر التي تقوم بترتيبها مختلفة – سيكون هناك بعض العناصر المتكررة من بين ن عناصر.

يتمثل أحد الخيارات في إجراء تراتيب لمجموعات الأحرف التي تتضمن تكرارات، مثل "ما عدد التراتيب المختلفة لـ أ أ ب، أ أ أ ب ، أ أ أ أ ب، ... التي يمكن إجراؤها؟"

في الفقرة "أفكار للتعليم" الآتية، نطرح سؤالًا مشابهًا: "كم عددًا مختلفًا يمكن تشكيله باستخدام العدد ٥ وأعداد متزايدة من ٩، أي باستخدام الأرقام ٥٩٩ ، ٥٩٩٩ ، ٥٩٩٩٩ ، ...؟".

أفكار للتعليم

نحاول هنا إيجاد عدد الأعداد المختلفة التي يمكن تشكيلها باستخدام مجموعات من الأرقام حيث يتكرر أحد الأرقام. ذكّر الطلبة، من خلال الجدول الآتي، بعدد التباديل عندما لا توجد أرقام متكررة:

النتائج عندما توجد ٠ أرقام مكررة			
عدد الأرقام	عدد الأرقام المتكررة	عدد التباديل	العملية
٣	٠	٦	!٣
٤	٠	٢٤	!٤
٥	٠	١٢٠	!٥
٦	٠	٧٢٠	!٦

نستخدم الرقم ٥ مرة واحدة وعددًا متزايدًا من ٩ المكرّرة.

١. ٥، ٩ ، ٩: ٣ أرقام، ٢ متكرران، ٣ تباديل: ٥٩٩، ٩٥٩، ٩٩٥

٢. ٥، ٩، ٩ ، ٩: ٤ أرقام: ٣ متكررة، ٤ تباديل: ٥٩٩٩، ٩٥٩٩، ٩٩٥٩، ٩٩٩٥

٣. ٥، ٩، ٩، ٩ ، ٩: ٥ أرقام، ٤ متكررة، ٥ تباديل: ٥٩٩٩٩، ٩٥٩٩٩، ٩٩٥٩٩، ٩٩٩٥٩، ٩٩٩٩٥

٤. ٥، ٩، ٩، ٩، ٩ ، ٩: ٦ أرقام، ٥ متكررة، ٦ تباديل: ٥٩٩٩٩٩، ٩٥٩٩٩٩، ٩٩٥٩٩٩، ٩٩٩٥٩٩، ٩٩٩٩٥٩، ٩٩٩٩٩٥

النتائج عندما يوجد أرقام مكررة			
عدد الأرقام	عدد الأرقام المتكررة	عدد التباديل	العملية
٣	٢	٣	٣! ÷ ٢!
٤	٣	٤	٤! ÷ ٣!
٥	٤	٥	٥! ÷ ٤!
٦	٥	٦	٦! ÷ ٥!

عند وجود ما مجموعه ن أرقام تتضمن ر أرقامًا متكرّرة، فإن عدد التباديل هو:

$$\frac{\text{ن !}}{\text{ر !}} = \frac{\text{عدد الأرقام!}}{\text{عدد التكرارات!}}$$

بالرغم من عدم ضرورة ذلك، يمكنك توسيع هذا الاستكشاف لإيجاد أعداد التباديل باستخدام رقمَين من (٥) وعددًا متزيدًا من الأرقام ٩ (أي الرقمَين متكررين).

يبيّن الجدول الآتي النتائج التي يجب اكتشافها:

نتائج لعدم (٠) تكرار الأرقام				
عدد الأرقام المستخدمة	عدد الأرقام	عدد الأرقام المتكررة	عدد التباديل	العملية
٥، ٥، ٩، ٩	٤	٢ و ٢	٦	٤! ÷ (٢! × ٢!)
٥، ٥، ٩، ٩، ٩	٥	٣ و ٢	١٠	٥! ÷ (٢! × ٣!)
٥، ٥، ٩، ٩، ٩، ٩	٦	٤ و ٢	١٥	٦! ÷ (٢! × ٤!)
٥، ٥، ٩، ٩، ٩، ٩، ٩	٧	٥ و ٢	٢١	٧! ÷ (٢! × ٥!)

عند وجود ما مجموعه ن أرقام تتضمن (ر) أرقامًا متكررة و(ق) أرقامًا متكررة، فإن عدد التباديل هو: $\frac{\text{ن !}}{\text{ر !} \times \text{ك!}}$

من المهم أن يفهم الطلبة أنه إذا تم تكرار ر عنصرًا من العناصر، ينقص عدد التباديل من ن! إلى $\frac{\text{ن!}}{\text{ر!}}$، وهو تصغير بمعامل ر! وليس تصغيرًا بمعامل ر.

عند هذه النقطة، يمكنك أن تقدم لهم الأفكار والترميز الموجود في نتيجة ٤. لاحظ أنه يمكننا حذف كل ١! واردة في المقام.

دعم الطلبة

يفهم معظم الطلبة الشرح أعلاه، ولذا فإن المساعدة الإضافية التي يحتاجون إليها في هذه المرحلة تتمثّل في التأكد من أنهم حصلوا على التمرين الأساسي الكافي كالأسئلة الواردة في التمرينَين ١، ٢ الواردَين في تمارين ٨–٢ب. ستسبّب الأعداد الكبيرة من العناصر مع أعدادٍ كبيرة من التكرارات بعض المشاكل، لكن تظل طريقة الحل هي ذاتها تلك المعتمدة مع الأعداد الصغيرة.

يتضمن Permutations with Indistinguishable Members (http://www.cambridge.org/links/mctd6863) العديد من الأمثلة الإضافية للطلبة الذين ما زالوا غير قادرين على التقدم في هذا الدرس من الوحدة.

تحدّي الطلبة

يتضمّن الموقع

Permutations with Indistinguishable Members (http://www.cambridge.org/links/mctd6863)، قسمًا للمراجعة (أسفل الصفحة) مؤلفًا من أسئلة كلامية لأولئك الذين يرغبون في تحدي أنفسهم أكثر، بالإضافة إلى رابط لملف PDF يحتوي إجابات محلولة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨-٢ب

٨-٢ج تباديل ن من العناصر المختلفة بوجود القيود

المفردات

قيود: هي الشروط التي يمكن أن توضع على اختيار أو ترتيب ما.

ملاحظات للمعلِّمين

يمكن عرض الكثير من الأفكار في هذا الدرس باستخدام وسائل مساعدة بصرية مثل الكتب أو المكعبات. ويجب أن تناقش المنهجية المتبعة في الأمثلة من ٨ إلى ١٠ مع الطلبة بشكل مطول، لأنها تشكل المرحلة التي سيحتاجون فيها إلى البدء بتشكيل استراتيجياتهم الخاصة من أجل حل المسائل، إذ لم يعد من الممكن أن يضغطوا على مفاتيح الحاسبة فقط وببساطة للحصول على الإجابات، وذلك من دون التفكير في الخيارات المتاحة بحسب القيود أولاً.

يجب أن يعلم الطلبة أنه غالبًا ما توجد طرائق مختلفة للوصول إلى الإجابة الصحيحة لهذا النوع من الأسئلة.

وضّح لهم أن القيود تقلل من عدد التراتيب الممكنة دائمًا.

أفكار للتعليم

من المفيد أن تقترح حالتَين متشابهتَين، وسؤال الطلبة عمّا إذا كان بإمكانهم تحديد الفرق الأساسي بين الحالتَين.

الحالة ١	الحالة ٢
يوجد ٥ مقاعد في صف. على ٥ رجال الجلوس في المقاعد الـ ٥ هذه. بكم طريقة يمكن عمل هذا؟ الإجابة: ترتيب ٥ رجال في صف = $ل_٥^٥$ = ١٢٠	يوجد ٥ مقاعد في صف. على ٥ رجال الجلوس في المقاعد الـ ٥ هذه (ولكن يجب أن يجلس الرجل الأكبر سنًا في المقعد الأوسط وهو يرفض التحرك). بكم طريقة يمكن عمل هذا؟ الإجابة: ترتيب ٤ رجال في صف = $ل_٤^٤$ = ٢٤
الفرق: تتطلب الحالة ١ تراتيب لـ ٥، بينما تتطلب الحالة ٢ تراتيب لـ ٤	

دعم الطلبة

يمكنك على سبيل المثال، وباستخدام ٦ كتب مناسبة (بدلًا من ستة رجال)، أن تمثل لهم كيفية إيجاد:

عدد طرق ترتيب ٦ كتب مختلفة في صف بحيث يجب:

- أ أن يكون الكتاب الأكبر على الطرف الأيسر.
- ب أن يكون الكتابان الأصغران على الطرف الأيمن.
- ج أن لا يكون الكتاب الأكبر على أيّ من الطرفَين.

يجب أن تكون الآن التمارين ١ إلى ٤ من ٨-٢ج بمتناول فهم معظم الطلبة.

يمثل الجزء الأول من شريحة العرض الإلكتروني ٨-٢ حالة تعالج تراتيب حيث تتضمن القيود وجوب أن لا تفترق بعض العناصر. وهذا شبيه أساسًا بالمثال ١٠، ولكنه يتضمن تمثيلات تصويرية، ما يجعله أسهل لبعض الطلبة.

تحدّي الطلبة

قد يشكّل اتباع المنطق المستخدم في أنواع المسائل كتلك الموجودة في المثالين ٨ و٩ تحديًا كبيرًا لبعض الطلبة.

أما أولئك الذي يفهمون الأفكار المستخدمة في طريقة الحل، فيمكنهم البدء بحل الجزئيتين من السؤال ٥ في تمارين ٨-٢ج.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨-٢ج

٨-٢د تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة

ملاحظات للمعلِّمين

ركزت الدروس السابقة على تباديل مجموعة كاملة من العناصر وفي هذا الدرس سيتم التركيز على تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة حيث ر $<$ ن.

في الوقت الذي نختار فيه عناصر لنرتبها، نختار أيضًا عناصر لا نريد ترتيبها. إن عدد التباديل لـ ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة، بدلالة مضروب العدد هو $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$، حيث ر هو عدد العناصر التي نختارها لترتيبها، (ن − ر) هو عدد العناصر غير المختارة للترتيب.

اسأل الطلبة، باستخدام مفتاح $\boxed{{}_nP^r}$ في الحاسبة، أن يجربوا من خلال إيجاد قيم لـ $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-\text{ر}}$، حيث

ر + (ن − ر) = ن، كمثل $^{٧}\text{ل}_{٣}$ ، $^{٧}\text{ل}_{٤}$ أو $^{٨}\text{ل}_{٢}$ ، $^{٨}\text{ل}_{٦}$ وناقش أي نتائج يتوصلون إليها.

أفكار للتعليم

من المفيد أن تجعل الطلبة يعددون الأعداد ذات الـ ر رقم التي يمكن كتابتها باستخدام ر = ١، ٢، ٣، ٤ من ن = ١، ٢، ٣، ٤ أعداد صحيحة موجبة متتابعة بالرغم من أننا نبحث في الحالات التي يكون فيها ر $<$ ن، سيكون من المفيد تضمين نتائج ن = ر أيضًا، حيث قد يكون من السهل رؤية الأنماط. سيساعدهم هذا الأمر على الربط بين قيم الحاسبة والأمثلة الحياتية الواقعية، ولكنه سيكون مفيدًا فقط في حال وضعوا نتائجهم في جداول، العمل الذي قد يصل واقعيًا حتى ن = ٤ فقط.

يمثل الجدول أدناه تسجيلًا مقترحًا للنتائج المتعلقة بقيم ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥

قيمة ن	قيمة ر				
	١	٢	٣	٤	٥
١	١	−	−	−	−
٢	٢	٢	−	−	−
٣	٣	٦	٦	−	−
٤	٤	١٢	٢٤	٢٤	−
٥	٥	٢٠	٦٠	١٢٠	١٢٠

دعم الطلبة

من المفيد أن تعطي الطلبة مجموعة من الأمثلة ليقوموا بإيجاد قيمها باستخدام الحاسبة، ثم تجعلهم يشرحون كيف توصلوا إلى النواتج؛ مثلًا يتطلب السؤال "أوجِد قيمة $^{٩}\text{ل}_{٣}$" كتابة

$$\frac{٩!}{٦!} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{\cancel{٦!}} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$$

سيذكرهم هذا السؤال ببعض الأسئلة التي عالجوها في تمارين ٨−١ الواردة في بداية هذه الوحدة، حيث استخدموا حقيقة أن ن! = ن × (ن−١)! وهكذا، وذلك لتبسيط الكسور.

تحدّي الطلبة

تجمع الأمثلة ١٣، ١٤، ١٥ تراتيب ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة مع قيود (لكن من دون تكرار). لا يمكننا تعميم المنطق المستخدم في إيجاد إجابات هذه الأمثلة، فقد تجد أن الطلبة قادرون على ابتكار طرائقهم الخاصة الذكية لإيجاد الإجابات الصحيحة للأسئلة الصعبة الواردة في تمارين ٨–٢د، وهي السؤالان ٦، ٧

وإذا أراد أي من الطلبة تحديًا إضافيًا، يقدم

Permutations with Restrictions (http://www.cambridge.org/links/mctd6868) أسئلة متنوعة حول كل أنواع التباديل التي تمّت دراستها من الدرس ٨–٢أ إلى الدرس ٨–٢د.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨–٢د

٨-٣ التوافيق

المفردات

التوافيق: هي اختيار عناصر من مجموعة تتألف من عناصر متمايزة بحيث لا يهم ترتيب الاختيارات (على عكس التباديل).

الاختيارات المستقلّة: اختياران (أو أكثر) حيث تكون نتيجة اختيار واحد منهما لا تأثير لها على حدوث الاختيار الآخر.

ملاحظات للمعلِّمين

يمكنك تقديم هذا الموضوع بالطريقة نفسها التي استخدمت في الدرس ٨-٢، إذ يكمن التحدي الأكبر للطلبة هنا في أن يقرأوا الأسئلة بانتباه وأن يتأكدوا من إدراكهم الفرق بين التباديل والتوافيق. يجب أن يسألوا أنفسهم: "هل أقوم أنا بالاختيار فقط، أم أنني أقوم بالاختيار والترتيب بترتيب معيّن؟" بمعنى آخر "هل الترتيب مهم؟"

إذا أردنا، على سبيل المثال، اختيار ولدين من مجموعة مكوّنة من ٥ أولاد، كلاهما بدون مهمة معيّنة، فإن الترتيب الذي يتم اختيارهما به لا يهم، وبالتالي، سنقوم باختيار بسيط أو توفيقة وسيكون عدد التوافيق

$\binom{٥}{٢} = ١٠$

ومع ذلك، إذا تم اختيار الولدين لمهام معيّنة (أحدهما للذهاب إلى المتجر والآخر لزرع البذور في الحديقة)، فسيكون ترتيب الاختيار مهمًا وسنقوم بإجراء تبديل. سيكون عدد التباديل $^{٥}ل_{٢} = ٢٠$

لاحظ أنه في هذا المثال عدد التباديل هو ضعف عدد التوافيق، والسبب واضح تمامًا: لكل زوج من الولدين اللذَين يمكننا اختيارهما، يمكننا إرسال الأول إلى المتجر والثاني إلى الحديقة، أو الأول إلى الحديقة والثاني إلى المتجر (توجد ٢! = طريقتان لتخصيص المهمات).

أفكار للتعليم

نستمر في الموضوع نفسه ونعمل على ٦ أحرف أ ب ج د هـ و.

١) اختر ١ من ٦ أحرف حين لا يكون للترتيب أهمية: أ ب ج د هـ و: ٦ طرائق

٢) اختر ٢ من ٦ أحرف

أ ب (هو ذاته ب أ) أ ج، أ د، أ هـ، أ و، ب ج، ب د، ب هـ، ب و، ج د، ج هـ، ج و، د هـ، د و، هـ و: ١٥ طريقة

٣) اختر ٣ من ٦ أحرف

أ ب ج (هو ذاته ج ب أ) أ ب د، أ ب هـ، أ ب و، أ ج ، أ ج هـ، أ ج و، أ د هـ، أ د و، أ هـ و، ب ج د، ب ج هـ، ب ج و، ب د هـ، ب د و، ب هـ و، ج د هـ، ج د و، ج هـ و، د هـ و: ٢٠ طريقة

٤) اختر ٤ من ٦ أحرف

أ ب ج د، أ ب ج هـ، أ ب ج و، أ ب د هـ، أ ب د و، أ ب هـ و، أ ج د هـ، أ ج د و، أ ج هـ و، أ د هـ و، ب ج د هـ، ب ج د و، ب ج هـ و، ب د هـ و، ج د هـ و: ١٥ طريقة

٥) اختر ٥ من ٦ أحرف

أ ب ج د هـ، أ ب ج د و، أ ب ج هـ و، أ ب د هـ و، أ ج د هـ و، ب ج د هـ و: ٦ طرائق

٦) اختر ٦ من ٦ أحرف: أ ب ج د هـ و: طريقة واحدة.

يمكننا أيضًا تضمين النتيجة التي تفيد بوجود طريقة واحدة لاختيار ٠ من ٦ أحرف. نلخص هذه النتائج في الأعمدة الثلاثة الأولى، ومن ثم نعبّر عن القيم باستخدام المضروب:

ن	ر	عدد الطرائق	عملية مختصرة	عملية كاملة	ن! ÷ [ر! × (ن − ر)!]
٦	٠	١	٦! ÷ ٧٢٠	٦! ÷ (١ × ٧٢٠)	٦! ÷ (٠! × ٦!)
٦	١	٦	٦! ÷ ١٢٠	٦! ÷ (١ × ١٢٠)	٦! ÷ (١! × ٥!)
٦	٢	١٥	٦! ÷ ٤٨	٦! ÷ (٢ × ٢٤)	٦! ÷ (٢! × ٤!)
٦	٣	٢٠	٦! ÷ ٣٦	٦! ÷ (٦ × ٦)	٦! ÷ (٣! × ٣!)
٦	٤	١٥	٦! ÷ ٤٨	٦! ÷ (٢٤ × ٢)	٦! ÷ (٤! × ٢!)
٦	٥	٦	٦! ÷ ١٢٠	٦! ÷ (١٢٠ × ١)	٦! ÷ (٥! × ١!)
٦	٦	١	٦! ÷ ٧٢٠	٦! ÷ (٧٢٠ × ١)	٦! ÷ (٦! × ٠!)

يمكننا أن نرى أن الصيغة لحساب ر خيار من ٦ هي $\frac{\text{٦!}}{\text{ر!(٦ − ر)!}}$ أو $\frac{\text{٦!}}{\text{(٦ − ر)! ر!}}$

يمكن تعميم صيغة حساب ر خيار من ن إلى الشكل $\frac{\text{ن!}}{\text{ر!(ن − ر)!}}$ أو $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)! ر!}}$

وطريقة بديلة لهذه الطريقة التي تتطلب وقتًا هي تقديم رمز التوافيق $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ أو المفتاح $^{n}C_{r}$ في الحاسبة وهي الطريقة القياسية التي اعتمدناها في الدرس ٨-٣، وهي:

باستخدام الرموز	مثال مع أعداد
اختيار ر من ن و تراتيب ر } تباديل ر من ن	اختيار ٤ من ٧ و تراتيب ٤ } تباديل ٤ من ٧
$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} \times \text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ر}} = \text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}}$ $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} \times \text{ر!} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$	$\binom{٧}{٤} \times \text{ل}_{٤}^{٤} = \text{ل}_{٤}^{٧}$ $\binom{٧}{٤} \times \text{٤!} = \frac{\text{٧!}}{\text{(٧ − ٤)!}}$
$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن!}}{\text{ر!(ن − ر)!}}$	$\binom{٧}{٤} = \frac{\text{٧!}}{\text{٤!(٧ − ٤)!}}$ $= \frac{\text{٧!}}{\text{٤! × ٣!}}$

دعم الطلبة

لتساعد بعض الطلبة على التقدم في هذا الموضوع، قد تحتاج إلى تدريب رقمي لاستخدام الرمز $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$، وإلى تدريب على استخدام الحاسبة، وأسئلة مباشرة إضافية كتلك الموجودة في بداية تمارين ٨-٣

وللتدريب، استخدم قيم ن و ر التي تنتج إجابات صغيرة نسبيًا (أقل من ٥٠٠) باستخدام أسئلة مصاغة مثل:

١) امرأة لديها ٩ شوكات و١٠ ملاعق. ما عدد الطرق المختلفة التي يمكنها الاختيار من بينها:

أ شوكتان ب ملعقتان؟

(الإجابات: أ $\binom{٩}{٢}$ = ٣٦ ب $\binom{١٠}{٢}$ = ٤٥)

٢) رجل لديه ١١ حفيدًا و ١٢ حفيدة. ما عدد الطرق المختلفة التي يمكنه اختيارها

أ ٣ أحفاد ب ٣ حفيدات؟

(الإجابات: أ $\binom{١١}{٣}$ = ١٦٥ ب $\binom{١٢}{٣}$ = ٢٢٠)

تحدّي الطلبة

من المرجح أن تشكل التمارين ٥ إلى ٨ من تمارين ٨-٣ تحديًا للطلبة لأن المطلوب منهم إيجاد طرائقهم الخاصة لحل المسائل، وسيتضمن هذا كلًا من ضرب وجمع أعداد التوافيق، لأنه يمكن الحصول على النواتج المطلوبة بإجراء التوافيق بطرق متنافية ومختلفة، ما يعني أن المطلوب هو إضافة عدد من التوافيق.

يسمح Combinations and Permutations Calculator (http://www.cambridge.org/links/mctd6870) للطلبة

بالتحقق مما يحصل كلما تزايد عدد العناصر المختارة وعدد العناصر التي يجب أن يختاروا منها. يجب أن تضع 'Yes' في خانة 'Is Order Important?' (هل الترتيب ضروري؟) إذا تتطلب الأمر استخدام التباديل، وأن تضع 'No' إذا تتطلب الأمر استخدام التوافيق، كما يجب أن تضع 'No' في خانة 'Is Repetition Allowed' (هل التكرار مسموح؟).

يمكن عندئذ حساب عدد التباديل/التوافيق، من خلال الضغط على مفتاح 'List'، فتظهر النتائج في نافذة صغيرة ويمكن بعد ذلك إغلاقها بالضغط على مفتاح 'Tick'.

إرشادات حول أنشطة استكشف

استكشف ٢

١. أ ب، ب أ، أ ج، ج أ، ب ج، ج ب

٢. أ و ب، أ و ج، ب و ج

استكشف ٣

أ ١ ب ن ج ١

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٨-٣

تمارين مراجعة نهاية الوحدة ٨

مصادر أخرى مفيدة

في Permutations and Combinations (http://www.cambridge.org/links/mctd6874) بعض المسائل التي تتضمن تباديل للحل.

يراجع Combinations and Permutations (http://www.cambridge.org/links/mctd6875) الوحدة بأكملها من البداية وينهي باختبار من ١٠ أسئلة مع تغذية راجعة فورية بعد كل سؤال.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الثامنة

التباديل والتوافيق

العرض التوضيحي الإلكتروني ٨ – ١

التباديل

سنقوم بالتحقق من عدد طرائق
ترتيب العناصر.

سنبدأ بعنصرين، أ، ب.

يوجد ترتيبان ممكنان:
أ ب، ب أ

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

ننتقل إلى ٣ عناصر، أ، ب ج.
يوجد ٦ تراتيب ممكنة:

أ ب ج
أ ج ب ٢ تبدأ بـ أ
ب أ ج
ب ج أ ٢ تبدأ بـ ب
ج أ ب
ج ب أ ٢ تبدأ بـ ج

نحتاج الآن إلى البدء بتسجيل النتائج.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد العناصر	عدد التراتيب
٢	٢
٣	٦

من الصعب رؤية النمط بهذا الكم القليل من المعلومات.

لذا، نعدد النتائج لأربعة عناصر، أ، ب، ج، د.

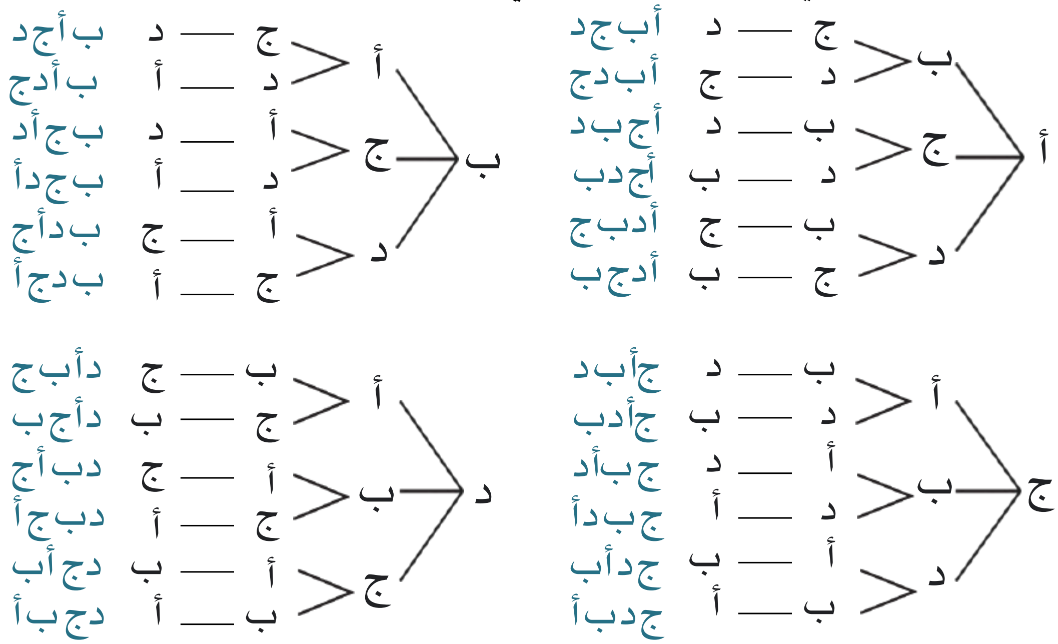
الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

أبجد	أبدج	أجبد	أجدب	أدبج	أدجب	٦ تبدأ بـ أ
بجدأ	بجأد	بدأج	بدجأ	بأجد	بأدج	٦ تبدأ بـ ب
جدأب	جدبأ	جأبد	جأدب	جبأد	جبدأ	٦ تبدأ بـ ج
دأبج	دأجب	دبأج	دبجأ	دجأب	دجبأ	٦ تبدأ بـ د

المجموع ٢٤

يتم عرض طريقة منظّمة لإنشاء هذه القائمة في الشريحة التالية

مخطّط الشجرة الذي يبينّ التراتيب الستة التي تبدأ بكل حرف:



يمكننا الآن إضافة هذه النتيجة إلى الجدول

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد العناصر	عدد التراتيب
٢	٢
٣	٦
٤	٢٤

هل يمكنك رؤية النمط الآن؟

توجد طريقتان لوصف النمط.

هل يمكنك إكمال السطر التالي في الجدول؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد العناصر	عدد التراتيب
٢	٢
٣	٦
٤	٢٤
٥	١٢٠

يمكنك أن ترى سبب عدم الرغبة في إنشاء قائمة.

يوجد ١٢٠ ترتيبًا لخمسة عناصر.

هل يمكنك أن تصف النمط الذي تراه؟

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد العناصر	عدد التراتيب
٢	٢
٣	٦
٤	٢٤
٥	١٢٠

٢ × ٣ = ٦

٦ × ٤ = ٢٤

٢٤ × ٥ = ١٢٠

٢ × ٣ = ٦

٦ × ٤ = ٢٤

٢٤ × ٥ = ١٢٠

هذه الطريقة ناجحة، لكنها تتطلب الكثير من الوقت لإيجاد عدد التراتيب لـ ٢٠ عنصرًا.

علينا أن نجد طريقة أخرى لوصف النمط.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد العناصر	عدد التراتيب	
٢	٢	= ١ × ٢
٣	٦	= ١ × ٢ × ٣
٤	٢٤	= ١ × ٢ × ٣ × ٤
٥	١٢٠	= ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥

لقد رأيت هذا النمط؟ أحسنت!

لكن إيجاد عدد التراتيب لعشرين عنصرًا ما زال صعبًا.

يوجد مفتاح على الحاسبة يقوم بالأمر نيابة عنك.

إنه مفتاح دالة المضروب: $n!$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد التراتيب الممكنة لـ ن عنصر هو ن!

حيث

$$ن! = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

على سبيل المثال:

$$٢٠! = ٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

لاستخدام حاسبة بهدف إيجاد عدد التراتيب الممكنة لعشرين عنصرًا:

اضغط على المفاتيح $\boxed{20}$ $\boxed{n!}$ $\boxed{=}$ لتجد الإجابة.

في الصيغة القياسية، ومقربًا إلى أقرب ٣ قيم معنوية، ستكون القيمة:

$$٢,٤٣ \times ١٠^{١٨}$$

الوحدة الثامنة

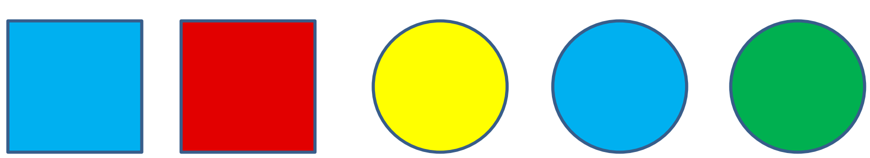
التباديل والتوافيق

العرض التوضيحي الإلكتروني ٨ – ٢

التباديل مع قيود

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

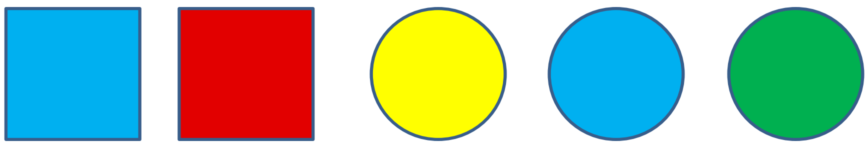
أمامك ٥ أشكال ملوّنة.



نريد أن نرتب الأشكال في صف.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

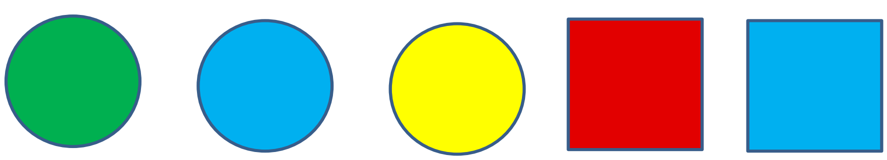
١- ما عدد التراتيب الممكنة إذا لم توجد قيود على الترتيب؟



الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

عدد الخيارات لكل موقع مكتوب على كل خط أدناه:

٥ ٤ ٣ ٢ ١



عدد الخيارات الكلي هو

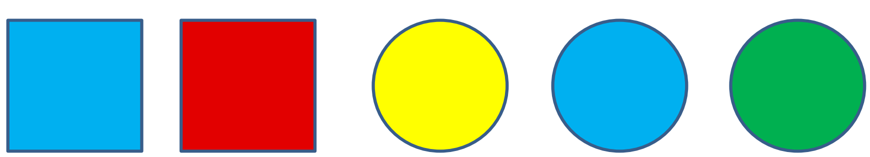
٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥! = $ل^{٥}_{٥}$ = ١٢٠

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

يوجد ١٢٠ ترتيبًا ممكنًا إذا لم توجد قيود على الترتيب.

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

٢ – ما عدد التراتيب الممكنة لو كان يجب أن يكون الشكلان الأزرقان متجاورين؟

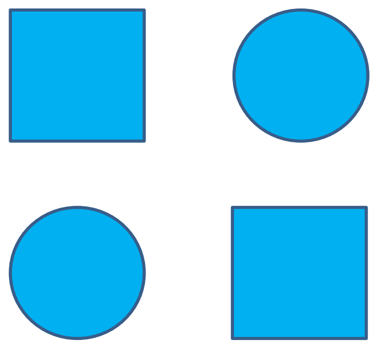


الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

يوجد $ل_{٢}^{٢} = ٢! = ٢$ طريقة لوضع الشكلين الأزرقين متجاورين:

هكذا

أو هكذا

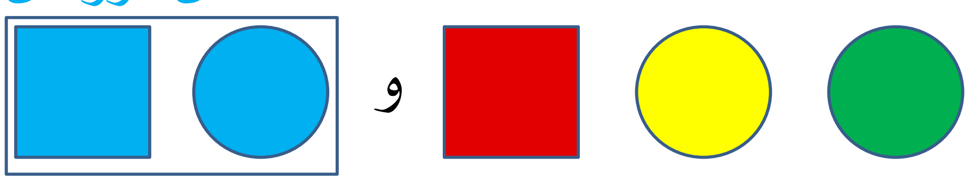


الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

لدينا الآن ٤ عناصر لنرتبها في صف.

هذه العناصر الأربعة هي:

شكلان أزرقان



في كلا الترتيبين

يمكن فعل هذا في $ل_{٤}^{٤} = ٤! = ٢٤$ طريقة

عدد طرائق ترتيب

الشكلين الأزرقين = $ل_{٢}^{٢}$ = ٢

عدد طرائق ترتيب

الأشكال الأربعة = $ل_{٤}^{٤}$ = ٢٤

العدد الكلي للتراتيب = ٢ × ٢٤ = **٤٨**

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

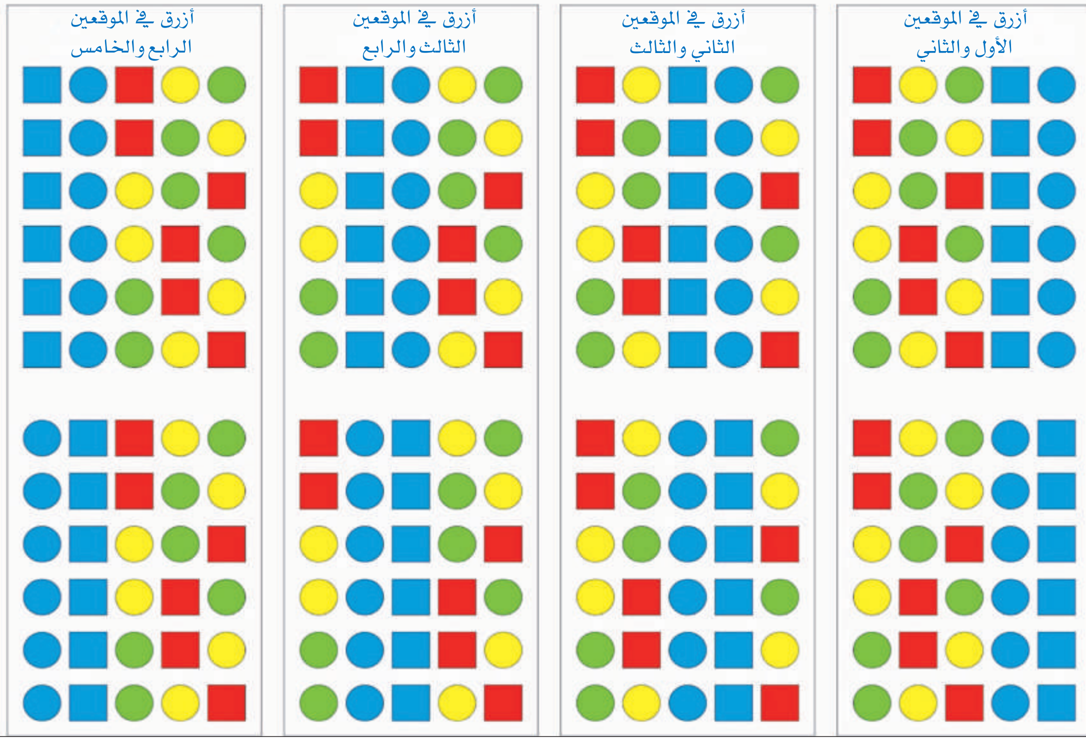
ما يلي هو

التراتيب الـ **٤٨**

حيث يكون

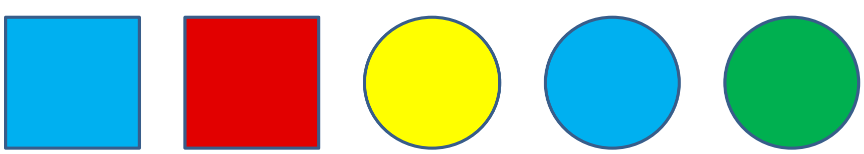
الشكلان الأزرقان متجاورين ...

الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني



الرياضيّات الأساسية للصف الحادي عشر - الفصل الدراسي الثاني

٣- ما عدد التراتيب الممكنة لو كان يجب أن **لا** يكون الشكلان الأزرقان متجاورين؟



عندما لا توجد قيود، يكون هناك ١٢٠ ترتيبًا ممكنًا.

يكون الشكلان الأزرقان متجاورين

في ٤٨ من هذه التراتيب

∴ **لا** يكون الشكلان الأزرقان متجاورين في

١٢٠ − ٤٨ = ٧٢ ترتيبًا

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة الثامنة : التباديل والتوافيق

إجابات معرفة قبلية

١) أ ١٥٦ ب ٩٠ ج ٥,٥

٢) أ $\frac{٩}{٢}$

ب $\frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

تمارين ٨-١

١) أ ٢٠

ب ٦

ج ٢٩٤

د ١٦٢

هـ ٢٢٤

٢) أ ٨٧

ب $\frac{!٦}{٤٠}$، $\frac{١}{٢٦٠} \times !٧$، $\frac{!٥ \times ٢}{٢ \times !٣}$

ج ٠

د ١٥٠٠٠

٣) ١٨ سم

٤) الجانب الأيمن = الجانب الأيسر = $\frac{١}{٧٢}$

٥) ١٢ سم

تمارين ٨-٢أ

١) أ ٢٤

ب ٥٠٤٠

ج ٤٠٣٢٠

٢) أ ٣٩٩١٦٨٠٠

ب ٦٢٢٧٠٢٠٨٠٠

ج ٤٧٩٠٠١٦٠٠

٣) ٧٢٠

٤) أ ٢ ب ٧٢٠ ج ٤٠٣٢٠

٥) أ ٢٤ ب ٦

تمارين ٨-٢ب

١) أ ٢٤ ب ٦٠ ج ٣٠

د ٨٤٠ هـ ٤٥٣٦٠٠

٢) أ ٦ ب ٢٠

ج ٦٠ د ١٥

٣) أ ٦ ب ١

ج ٦٤٣٥ د ٩٩٧٦٨٢٤٠

٤) الطالبة الأولى محقة، اعتبرت الطالبة الثانية أن الأشجار الصغيرة متطابقة والأشجار الكبيرة متطابقة.

٥) يظهر حرف ثلاث مرات، حرف آخر يظهر مرّتَين، وحرفان آخران يظهران مرة واحدة لكل منهما.

تمارين ٨-٢ج

١) أ ١٢٠

ب ١) ٤٨ ٢) ٧٢

٢) أ ٤٨ ب ١٩٢ ج ٠

٣) ٢ : ١

٤) أ ٨٠٦٤٠ ب ٢٤١٩٢٠

٥) أ ٢٠ ب ٤٠

تمارين ٨-٢د

١) أ ٢٥٢٠ ب ٣٠٢٤

٢) ٦٨٤٠

٣) أ ١٨٢ ب ١٤

٤) أ ٦٠ ب ٢٤٠

٥) أ ٢٧٢

ب ١٣٢

ج ١٤٠

٦) ٣٦٠

٧) أ ١٢ ب ٣٦

تمارين ٨-٣

١) أ ١) ٥

٢) ١

ب ١) ٣٠

٢) ١٩

ج ١) ١٩٦٠

٢) ١٧٦٤٠

٢) أ ١٩٦٠

ب ٩٨٠

ج ١٢١

٣) أ ٢٥٩٨٩٦٠ ب ٨٤٥٠٠٠

٤) أ ١) ٢٣٠٢٣٠

٢) ٢٣٠٢٣٠

ب س = ص + ع

٥) ١٢٥

٦) أ ١٢٠

ب ٣٤

٧) يمكنهم مشاركة سيارتَي الأجرة بـ ٥٦ طريقة، وليس مهمًا أيهما شغلت أولًا.

٨) ١٠

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) أ ٣٢٦٥٩٢٠٠

ب ٨٤٦٧٢٠٠

٢) ٥٤٠

٣) أ ١٠٠٠٠٠٠٠

ب ١) ١٠٠٠٠

٢) ١٠٠

٤) ١٧٢٨٠

٥) أ ٧٥٦٧٥٦

ب ٧٢٠٧٢

٦) ٩١

٧) أ $١٠^{٩}$ أو ١×١٠^{٩}

ب $٩^{٣} \times ١٠^{٦}$ أو $٧,٢٩ \times ١٠^{٨}$

ج ٩×١٠^{٨}

٨) ٨١

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة الثامنة: التباديل والتوافيق

تمارين ٨-١

١) أ ١٢٠ ب ٢
ج ٤٣٢ د $\frac{٦٧}{٢٢٥}$

٢) ١٩ سم

٣) برهان

٤) أ = ٣، ب = ٥

تمارين ٨-٢أ

١) ٥٠٤٠

٢) ٧٢٠

٣) أ ٧٢٠ ب ٢٤
ج ٣٦٢٨٠٠

٤) ٣٠!

تمارين ٨-٢ب

١) أ ٤٥٣٦٠٠ ب ٢١٦٢١٦٠٠

٢) ١١٣٤٠٠

٣) طيور الكناري الأربعة والعصافير الثلاثة سبعة عناصر مختلفة.

٤) ٣٦٢٨٨٠

٥) أ ١٢٩٦ ب ٨١

تمارين ٨-٢ج

١) أ ٢٤
ب ١) ١٨
٢) ١٢

٢) ٤٠٣٢٠

٣) ٧٢٥٧٦٠٠

٤) أ ٨٤٠
ب عدد التراتيب = ٣! = ٦ لأن الأحرف المتبقية هي ٣ من دون تكرار.

٥) أ $٨,٧٢ \times ١٠^{١٠}$
ب ٩٥٨٠٠٣٢٠٠

٦) أ ٣٦٢٨٨٠٠
ب ٤٠٢٧٩٦٨٠٠

٧) أ ١٦٨٠
ب ١١٧٦٠

تمارين ٨-٢د

١) أ ١٧١٦ ب $٦,٠٨ \times ١٠^{١٦}$

٢) أ ٣٦٠ ب ٢١٦٠
ج ١٨٠٠ د ٧٢٠

٣) أ ٤ ب ٢٤

٤) ٩

تمارين ٨-٣

١) أ ٧١ ب ٨٤٠
ج ٣٦٤

٢) أ ٣٥ ب ١

٣) أ ١٢٠ ب ٧٠
ج ٨٤٠٠

٤) أ ١٦٧٩٦٠ ب ٢٥٢
ج ١٥٥٠٤٠

٥) أ ٤٦٢
ب ١) ٢٠٠
٢) ٢٨١

٦) أ ٤٥ ب ١٤٥

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) أ ٢٠ ب ٢٥

٢) أ ١٠٠٨٠ ب ٩٣٦٠

٣) ٩٩٧٦٨٢٤٠

٤) أ ٢٤٠ ب ١٤٤

٥) ٧

٦) ٢٤٣

٧) $٢١^٢ - ١ = ٤٤٠$

الوحدة الثامنة : حلول تمارين كتاب الطالب

التباديل والتوافيق

تمارين ٨-١

١) أ $\frac{٥!}{٣!} = \frac{١×٢×٣×٤×٥}{١×٢×٣} = ٥ × ٤ = ٢٠$

ب $\frac{٤!}{٢!} - ٣! = \frac{١×٢×٣×٤}{١×٢} - ٦ = ١٢ - ٦ = ٦$

يمكن تفكيك $\frac{٤!}{٢!} - ٣!$ إلى $٣! \left(\frac{٤}{٢!} - ١\right) = ٦(٢ - ١) = ٦$

ج $٧ × ٤! + ٢١ × ٣! = (٧ × ٣!)(٤ + ٣) = ٧ × ٦ × ٧ = ٢٩٤$

د $\frac{١٠!}{٨!} + \frac{٩!}{٧!} = ١٠ × ٩ + ٩ × ٨ = ٩٠ + ٧٢ = ١٦٢$

هـ $\frac{٢٠!}{١٨!} - \frac{١٣!}{١١!} = ٢٠ × ١٩ - ١٣ × ١٢ = ٣٨٠ - ١٥٦ = ٢٢٤$

٢) أ اضغط على المفاتيح الآتية في الحاسبة: $٥! - ٤! - ٣! - ٢! - ١!$

$(= ١٢٠ - ٢٤ - ٦ - ٢ - ١) = ٨٧$

ب $\frac{٢ × ٥!}{٣! × ٢} = ٢٠$، $\frac{٦!}{٤٠} = ١٨$، $\frac{١}{٢٦٠} × ٧! \approx ١٩{,}٤$. الترتيب هو $\frac{٦!}{٤٠}$ ، $\frac{١}{٢٦٠} × ٧!$، $\frac{٢ × ٥!}{٣! × ٢}$

ج $٩! - ٩ × ٨! = ٩! - ٩! = ٠$

د $\frac{١٣! - ٧!}{٩! + ٨!} = \frac{٦٢٢٧٠١٥٧٦٠}{٤٠٣٢٠٠} = ١٥٤٤٣{,}٩٨٧٥ \approx ١{,}٥ × ١٠^{٤} = ١٥٠٠٠$

٣) $\frac{٦! - ١٢ × ٤!}{٤!} = \frac{٦ × ٥ × ٤! - ١٢ × ٤!}{٤!} = \frac{٤!(٦ × ٥ - ١٢)}{٤!} = ٣٠ - ١٢ = ١٨$ سم

ملاحظة: يمكن استخدام التجربة والتحسين لحل التمرينَين ٣ ، ٤

٤) $\frac{٧!}{٩!} = \frac{١٠}{٦!}$

$\frac{\cancel{٧!}}{٩ × ٨ × \cancel{٧!}} = \frac{١\cancel{٠}}{٧٢\cancel{٠}}$

$\frac{١}{٧٢} = \frac{١}{٧٢}$

٥) $س = \sqrt{(\sqrt{٤!})^{٢} + (\sqrt{٥!})^{٢}}$

$= \sqrt{٤! + ٥!}$

$= \sqrt{٢٤ + ١٢٠}$

$= \sqrt{١٤٤}$

$= ١٢$ سم

تمارين ٨-٢أ

١) أ $٤! = ٢٤$

ب $٧! = ٥٠٤٠$

ج $٨! = ٤٠٣٢٠$

٢) أ $١١! = ٣٩٩١٦٨٠٠$

ب $١٣! = ٦٢٢٧٠٢٠٨٠٠$

ج $(٩ + ٣)! = ١٢! = ٤٧٩٠٠١٦٠٠$

٣) ترتيب ٦ من ٦ شتلات:

$ل_{٦}^{٦} = ٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

٤) أ ترتيب ٢ من ٢ امرأة: $ل_{٢}^{٢} = ٢! = ٢$

ب ترتيب ٦ من ٦ رجال: $ل_{٦}^{٦} = ٦! = ٧٢٠$

ج ترتيب ٨ من ٨ أشخاص: $ل_{٨}^{٨} = ٨! = ٤٠٣٢٠$

٥) أ $ل_{٤}^{٤} = ٤! = ٢٤$

ب $ل_{٣}^{٣} = ٣! = ٦$

تمارين ٨-٢ب

١) أ $٤! = ٢٤$

ب $\frac{٥!}{٢!} = ٦٠$

ج $\frac{٥!}{٢! \times ٢!} = ٣٠$

د $\frac{٨!}{٤! \times ٢!} = ٨٤٠$

هـ $\frac{١٠!}{٢! \times ٢! \times ٢!} = ٤٥٣٦٠٠$

٢) أ ستة أرقام بينها خمسة ١: $\frac{٦!}{٥!} = ٦$

ب ستة أرقام بينها ثلاثة ٢ وثلاثة ٧: $\frac{٦!}{٣! \times ٣!} = ٢٠$

ج ستة أرقام بينها ثلاثة ٦ واثنان ٧: $\frac{٦!}{٣! \times ٢!} = ٦٠$

د ستة أرقام بينها اثنان ٨ وأربعة ٩: $\frac{٦!}{٢! \times ٤!} = ١٥$

٣) أ ثلاث مربعات كلها مختلفة: $ل_{٣}^{٣} = ٣! = ٦$

ب خمسة مربعات بينها ٥ متطابقة في الشكل واللون:

$\frac{٥!}{٥!} = ١$

ج ١٥ مربعًا بينها ٧ متطابقة لونها أزرق، و ٨ متطابقة لونها أخضر: $\frac{١٥!}{٧! \times ٨!} = ٦٤٣٥$

د ٢٠ مربعًا بينها ٥ متطابقة لونها أحمر، و٧ متطابقة لونها أزرق، و٨ متطابقة لونها أخضر:

$\frac{٢٠!}{٥! \times ٧! \times ٨!} = ٩٩٧٦٨٢٤٠$

٤) الطالبة الأولى محقة. اعتبرت الطالبة الثانية أن الأشجار الصغيرة عناصر متطابقة والأشجار الكبيرة عناصر متطابقة.

٥) $\frac{٧!}{٣! \times ٢!} = \frac{٧!}{١٢} = ٤٢٠$، إذًا يظهر حرف ثلاث مرات، وحرف آخر يظهر مرّتَين، وحرفان آخران يظهران مرة واحدة لكل منهما.

تمارين ٨-٢ج

١) أ ${}^{٥}ل_{٥}$ = ٥! = ١٢٠

ب ١) يجب أن يبدأ العدد بـ ٣ أو ٥ (خياران)، ويمكن ترتيب الأرقام الأربعة المتبقية بـ ${}^{٤}ل_{٤}$ طريقة:

٢ × ${}^{٤}ل_{٤}$ = ٢ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢ × ٤! = ٤٨

٢) يجب أن يبدأ العدد بـ ٢ أو ٤ أو ٦ (٣ خيارات)، ويمكن ترتيب الأرقام الأربعة المتبقية بـ${}^{٤}ل_{٤}$ طريقة:

٣ × ${}^{٤}ل_{٤}$ = ٣ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٣ × ٤! = ٧٢

يمكننا بشكل بديل، أن نطرح الأعداد الفردية من ${}^{٥}ل_{٥}$، ما يعطي ١٢٠ − ٤٨ = ٧٢

٢) أ يمكن أن يقف الطفلان في الأمام بـ ${}^{٢}ل_{٢}$ طريقة، ويمكن أن نرتب الأربعة رجال بـ ${}^{٤}ل_{٤}$ طريقة. العدد الكلّي هو ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٤}ل_{٤}$ = ٤٨

ب يمكن أن يقف طفل في الأمام بـ ${}^{٢}ل_{١}$ طريقة، ويمكن أن يقف رجل في الخلف بـ ${}^{٤}ل_{١}$ طريقة. ويمكن أن نرتب الأربعة أشخاص المتبقين بـ ${}^{٤}ل_{٤}$ طريقة. العدد الكلّي هو ${}^{٢}ل_{١}$ × ${}^{٤}ل_{٤}$ × ${}^{٤}ل_{١}$ = ١٩٢

ج توجد ٣ مواقع فقط بين الطفلَين أو إلى أي جانب منهما، لذا لا يمكن التفريق بين الرجال الأربعة كلهم. ∴ عدد الطرق يساوي صفرًا.

٣) كل التراتيب الممكنة متساوية احتمال الحدوث، لذا يوجد عدد متساوٍ من مجموعات التراتيب تبدأ كل منها بواحد من الأرقام الستة. ويوجد ${}^{٦}ل_{٦}$ تباديل للأرقام الستة، أربعة من الأرقام فردية واثنان منها زوجي.

عدد التباديل المنتهية برقم فردي = $\frac{٤}{٦}$ × ${}^{٦}ل_{٦}$ = ٤٨٠

عدد التباديل المنتهية برقم زوجي = $\frac{٢}{٦}$ × ${}^{٦}ل_{٦}$ = ٢٤٠

∴ النسبة هي ٤٨٠ : ٢٤٠ وتساوي ٢ : ١ في الصورة المبسطة.

أربعة من الأرقام فردية واثنان منها زوجي، إذًا النسبة هي ٤ : ٢ = ٢ : ١

٤) أ يمكن أن نرتب الكتابَين الأقدمَين في الوسط بـ ${}^{٢}ل_{٢}$ طريقة، ويمكن أن نرتب الكتب الثمانية المتبقية بـ ${}^{٨}ل_{٨}$ طريقة. العدد الكلّي هو ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٨}ل_{٨}$ = ٨٠٦٤٠

ب يمكن أن نرتب الكتب الثلاثة الأجدد بـ ${}^{٣}ل_{٣}$ طريقة، ويمكن أن نرتب هذا الموقع للكتب الثلاثة مع الكتب السبعة المتبقية بـ ${}^{٨}ل_{٨}$ طريقة. العدد الكلّي هو ${}^{٣}ل_{٣}$ × ${}^{٨}ل_{٨}$ = ٢٤١٩٢٠

٥) أ ضع ٢ إلى اليمين ثم رتب الأرقام الخمسة المتبقية:

١ × $\frac{٥!}{٣!}$ = ٢٠

بطريقة بديلة، يوجد $\frac{٦!}{٢! \times ٣!}$ عدد مختلف مكوّن من ٦ أرقام. اثنان من الأرقام الستة عبارة عن ٢، لذا $\frac{٢}{٦}$ من مجمل الأعداد ذات الستة أرقام تبدأ بـ ٢.

العدد الكلي هو $\frac{٢}{٦}$ × $\frac{٦!}{٢! \times ٣!}$ = ٢٠

ب يبدأ بـ ١: $\frac{٥!}{٢! \times ٣!}$ × ١ = ١٠

يبدأ بـ ٣: $\frac{٥!}{٢! \times ٢!}$ × ١ = ٣٠

العدد الكلي هو ١٠ + ٣٠ = ٤٠

بطريقة بديلة، الأعداد التي لا تنقسم على ٢ فردية، لذا يجب أن تبدأ بـ ١ أو ٣

أربعة من الأرقام الستة هي ١ أو ٣، لذا $\frac{٤}{٦}$ من الأرقام لا تنقسم على ٢

العدد الكلي هو $\frac{٤}{٦}$ × $\frac{٦!}{٢! \times ٣!}$ = ٤٠

تمارين ٨-٢د

١) أ $^{٧}\text{ل}_{٥} = ٢٥٢٠$

ب $^{٩}\text{ل}_{٤} = ٣٠٢٤$

٢) $^{٢٠}\text{ل}_{٣} = ٦٨٤٠$

٣) أ اختيار ٢ من ١٤ لونًا وترتيبهما لبابَين: $^{١٤}\text{ل}_{٢} = ١٨٢$

> بطريقة بديلة، ١٤ خيارًا للباب الأول و ١٣ خيارًا للباب الثاني: ١٤ × ١٣ = ١٨٢

ب إذا كان للبابين اللون نفسه، فيمكن القيام بذلك بـ ١٤ طريقة، لأنه يوجد لديه ١٤ لونًا.

٤) أ ضع حرف الألف في البداية، ثم اختر ثلاثة من الأحرف الخمسة المتبقية ورتبها بعده: $١ \times {}^{٥}\text{ل}_{٣} = ٦٠$

> بطريقة بديلة، كل التراتيب الـ $^{٦}\text{ل}_{٤}$ الممكنة متساوية احتمال الحدوث، ويبدأ عدد متساوٍ منها بكل من الأحرف الستة. سيبدأ واحد على ستة من التراتيب (السدس) بـ أ: $\frac{١}{٦} \times {}^{٦}\text{ل}_{٤} = ٦٠$

ب يمكن أن يظهر الـ أ في الموقع الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع من الترتيب:

ضع حرف الألف في أي من المواقع الأربعة، ثم اختر ثلاثة من الأحرف الخمسة المتبقية ورتبها:

$^{٤}\text{ل}_{١} \times {}^{٥}\text{ل}_{٣} = ٢٤٠$

٥) أ اختر ورتب ٢ من ١٧ طالبًا كطبيب ومريض: $^{١٧}\text{ل}_{٢} = ٢٧٢$

ب اختر ورتب ٢ من ٧ طلاب الصف العاشر أو ٢ من ١٠ طلاب الصف التاسع: $^{٧}\text{ل}_{٢} + {}^{١٠}\text{ل}_{٢} = ١٣٢$

ج ٢٧٢−١٣٢ = ١٤٠

> بطريقة بديلة، هناك ١٠ طرق لاختيار طالب من العاشر لدور الطبيب و ٧ طرق لاختيار طالب من التاسع لدور المريض، أو العكس: ٢ × ٧ × ١٠ = ١٤٠

٦) يجب أن يوضع واحد من الأرقام الزوجية الثلاثة إلى اليمين: $^{٣}\text{ل}_{١}$

اختر ورتب ثلاثة من الأرقام الستة المتبقية: $^{٦}\text{ل}_{٣}$

العدد الكلي هو $^{٣}\text{ل}_{١} \times {}^{٦}\text{ل}_{٣} = ٣٦٠$

٧) أ يجب أن يبدأ العدد (في الآحاد) بـ ٠: $^{١}\text{ل}_{١}$

اختر ورتب اثنين من الأرقام الأربعة المتبقية: $^{٤}\text{ل}_{٢}$

العدد الكلي هو $^{١}\text{ل}_{١} \times {}^{٤}\text{ل}_{٢} = ١٢$

ب يجب ألّا تكون المئات صفرًا: $^{٤}ل_{١}$ (الأرقام المتاحة: ١، ٢، ٣، ٤)

يجب ألّا تكون الآحاد صفرًا: $^{٣}ل_{١}$ (تبقى ٣ أرقام غير صفرية متاحة)

ترتيبات العدد في موقع العشرات: $^{٣}ل_{١}$ (تبقى ٣ أرقام)

العدد الكلي هو $^{٤}ل_{١} \times {}^{٣}ل_{١} \times {}^{٣}ل_{١} = ٣٦$

تمارين ٨-٣

١) أ ١) $\binom{٥}{١} = ٥$

٢) $\binom{٦}{٦} = ١$

ب ١) $\binom{٦}{٣} + \binom{٥}{٢} = ٢٠ + ١٠ = ٣٠$

٢) $\binom{٨}{١} + \binom{٦}{١} + \binom{٥}{١} = ٨ + ٦ + ٥ = ١٩$

ج ١) $\binom{٨}{٣} \times \binom{٧}{٤} = ٥٦ \times ٣٥ = ١٩٦٠$

٢) $\binom{٩}{٢} \times \binom{٨}{٤} \times \binom{٧}{٦} = ٣٦ \times ٧٠ \times ٧ = ١٧٦٤٠$

٢) أ اختر أربعة من سبعة رجال، وخمسًا من ثماني نساء: $\binom{٧}{٤} \times \binom{٨}{٥} = ١٩٦٠$

ب اختر ثلاثة من سبعة رجال، وستًا من ثماني نساء:

$\binom{٧}{٣} \times \binom{٨}{٦} = ٩٨٠$

ج اختر ١٣ أو ١٤ أو ١٥ شخصًا من ١٥ شخصًا:

$\binom{١٥}{١٣} + \binom{١٥}{١٤} + \binom{١٥}{١٥} = ١٢١$

٣) أ اختر ٥ من ٥٢ ورقة: $\binom{٥٢}{٥} = ٢٥٩٨٩٦٠$

ب اختر ٣ من ٢٦ ورقة حمراء، و ٢ من ٢٦ ورقة سوداء: $\binom{٢٦}{٣} \times \binom{٢٦}{٢} = ٨٤٥٠٠٠$

٤) أ ١) اختر ٦ من ٢٦: $\binom{٢٦}{٦} = ٢٣٠٢٣٠$

٢) اختر ٢٠ من ٢٦: $\binom{٢٦}{٢٠} = ٢٣٠٢٣٠$

ب س = ص + ع

٥) عدد طرائق اختيار مجموعة من ثلاثة أطفال يكون فيها عدد الأولاد أكثر هي:

ولدان من الأولاد الستة وفتاة واحدة من الفتيات السبع، أو ثلاثة من الأولاد الستة ولا شيء من الفتيات السبع.

من الأولاد الستة	من الفتيات السبع	
٢	١	$\binom{٦}{٢} \times \binom{٧}{١} = ١٠٥$
٣	٠	$\binom{٦}{٣} \times \binom{٧}{٠} = ٢٠$
		العدد الكلي = ١٢٥

أو

٦) أ اختر واحدة من ٦ حمراء و واحدة من ٥ زرقاء وواحدة من ٤ صفراء:

العدد الكلي هو $\binom{٦}{١} \times \binom{٥}{١} \times \binom{٤}{١} = ١٢٠$

ب اختر ٣ من ٦ حمراء أو ٣ من ٥ زرقاء أو ٣ من ٤ صفراء:

العدد الكلي هو $\binom{٦}{٣} + \binom{٥}{٣} + \binom{٤}{٣} = ٣٤$

٧) يمكنهم مشاركة سيارتَي الأجرة بـ ٥٦ طريقة، وليس مهمًا أيهما شغلت أولًا.

٨) يوجد $\binom{٥}{٣} = ١٠$ خيارات ممكنة

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) أ رتب الخمس إداريات والأربع معلمات في صف: $^{٩}ل_{٩}$

اختر اثنَين من المواقع العشرة بين أو إلى أحد جانبَي الإداريات والمعلمات لتضع الطالبتَين فيهما: $^{١٠}ل_{٢}$

العدد الكلي هو $^{٩}ل_{٩} \times {}^{١٠}ل_{٢} = ٣٢٦٥٩٢٠٠$

بطريقة بديلة، اطرح عدد الترتيبات التي تكون فيهما الطالبتان متجاورتَين من العدد الكلي من دون أن توجد قيود: $^{١١}ل_{١١} - ({}^{٢}ل_{٢} \times {}^{١٠}ل_{١٠}) = ٣٢٦٥٩٢٠٠$

ب رتب ٥ إداريات وطالبتَين في صف: $^{٧}ل_{٧}$

اختر ٤ من المواقع الثمانية بين أو إلى أحد جانبَي هؤلاء السبعة لتضع فيهما المعلّمات الأربع: $^{٨}ل_{٤}$

العدد الكلّي هو $^{٧}ل_{٧} \times {}^{٨}ل_{٤} = ٨٤٦٧٢٠٠$

٢) الحرف الأول والحرف الأخير من الحرف نفسه: ٣ خيارات.

رتّب الأحرف الستة المتبقية بينهما ٢ من حرف و ٢ من حرف آخر: $\frac{٦!}{٢! \times ٢!}$

العدد الكلّي $= ٣ \times \frac{٦!}{٢! \times ٢!} = ٥٤٠$

٣) أ عشرة خيارات لكل من الأرقام الستة الباقية: $١٠^{٦} = ١٠٠٠٠٠٠$

ب ١) الترتيبات المطلوبة هي ١٠ خيارات لكل من الأرقام الأربعة الوسطى: $١٠^{٤} = ١٠٠٠٠$

٢) الترتيبات المطلوبة هي ١٠ خيارات للرقمَين الثالث والسادس معًا و ١٠ خيارات للرقمَين الرابع والخامس معًا: $١٠^{٢} = ١٠٠$

٤) نبدأ بوضع الكتب ذات الطول ١٥ سم (وهي ٥ كتب) إلى اليمين، ثم نضع الكتب الأطول منها وهي الكتب الأربعة ذات الطول ٢٠ سم في الوسط، ثم نضع الكتب الثلاثة ذات الطول ٢٥ سم إلى اليسار:

عدد الطرق $= ٥! \times ٤! \times ٣! = ١٧٢٨٠$

٥) أ اختر ٥ من ١٥ ثم ٥ من العشرة المتبقية وآخر خمسة سيشكلون المجموعة الثالثة:

$$\binom{١٥}{٥} \times \binom{١٠}{٥} \times \binom{٥}{٥} = ٧٥٦٧٥٦$$

ب اختر ٣ من ١٣ ليكونوا في مجموعة الأخوين نفسها، ثم ٥ من العشرة المتبقين وآخر خمسة سيشكلون المجموعة الثالثة:

$$\binom{١٣}{٣} \times \binom{١٠}{٥} \times \binom{٥}{٥} = ٧٢٠٧٢$$

٦) إذا لم يتم اختيار أي من الشخصَين، نختار ٥ من ٧:

$$\binom{٧}{٥} = ٢١$$

إذا اختير واحد من الشخصَين، نختار ٤ من ٧:

$\binom{٢}{١} \times \binom{٧}{٤} = ٧٠$

العدد الكلّي = ٢١ + ٧٠ = ٩١

بطريقة بديلة، اطرح عدد الاختيارات التي تتضمن الشخصَين من العدد الكلي للاختيارات الممكنة:

$\binom{٩}{٥} - \binom{٧}{٣} = ٩١$

٧) أ عشرة خيارات لكل من الأرقام التسعة:

$١٠^{٩}$ أو ١×١٠^{٩}

ب تسعة خيارات لثلاثة من الأرقام وعشرة خيارات لكل من الأرقام الستة الأخرى: $٩^{٣} \times ١٠^{٦}$ أو $٧٫٢٩ \times ١٠^{٨}$

ج في المجموعة الثانية، يوجد ١٠ خيارات لواحد من الأرقام و ٩ خيارات للآخر.

يوجد ١٠ خيارات لكل من الأرقام السبعة في المجموعة الأولى والمجموعة الثالثة:

عدد البطاقات يساوي $١٠ \times ٩ \times ١٠^{٧} = ٩ \times ١٠^{٨}$

٨) الاختيارات المطلوبة هي:

٤ حمراء: $\binom{٤}{٤} = ١$ أو

٣ حمراء ، ١ ليست حمراء: $\binom{٤}{٣} \times \binom{٥}{١} = ٢٠$ أو

٢ حمراء ، ٢ ليست حمراء: $\binom{٤}{٢} \times \binom{٥}{٢} = ٦٠$

العدد الكلي = ١ + ٢٠ + ٦٠ = ٨١

الوحدة التاسعة

مفكوك ذات الحدّين

Binomial expansions

مخطط توزيع الدروس

الدرس	الأهداف التعليمية	عدد الحصص	مصادر من كتاب الطالب	المفردات
٩-١ مفكوك ذات الحدّين باستخدام مثلث باسكال	٩-١ يستخدم مثلث باسكال ليجد مفكوك (أ + ب)^{ن}، حيث ن عدد صحيح موجب.	٣	استكشف ١ الأمثلة ١، ٢، ٣ تمارين ٩-١	مثلث باسكال
٩-٢ مفكوك ذات الحدَّين باستخدام الحد العام	٩-٢ يستخدم مفكوك (أ + ب)^{ن}، حيث ن عدد صحيح موجب، لإيجاد حد معين في مفكوك (أس + ب)^{ن} حيث تكون فيه قوى س محددة. ٩-٣ يستخدم الحد العام (الحد النوني) $ح_{ن} = \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$، ٠ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ن.	٤	الأمثلة ٤، ٥، ٦ تمارين ٩-٢	نظرية ذات الحدّين
تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة		٣		

٩-١ مفكوك ذات الحدّين باستخدام مثلث باسكال

المفردات

مثلث باسكال: تشكيل مثلثيّ من معاملات ذات الحدَّين يبدأ فيه كل صف وينتهي بالرقم واحد، كل عدد يتكوّن من مجموع العددين اللذين فوقه.

ملاحظات للمعلِّمين

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة على مفكوك ذات الحدَّين، وسيستخدمون مثلث باسكال ليجدوا المعاملات التي يحتاجون إليها. من المهم أن يربط الطلبة بين معاملات مثلث باسكال والمعاملات التي يحصلون عليها عند فكّ الأقواس، إذ يعتمد النجاح في مفكوك ذات الحدَّين على الوضوح ودقة الرموز المستخدمة والعمل الممنهج لملاحظة التغيّر في معاملات ذات الحدَّين وقوى كلا الحدَّين ضمن المتسلسلة.

أفكار للتعليم

قد ترغب بفقرة استكشف ١ ليتمكّن الطلبة من تحليل الأنماط العددية في مثلث باسكال، بحيث يساعدهم العمل في الأنماط العددية على تمييز المعاملات عند إيجاد مفكوك الأقواس المكوّنة من حدَّين جبريَّين. في التمارين ٩-١ يتعلّق السؤالان ٦، ٧ بدوالّ بدلالة س ومعكوساتها.

دعم الطلبة

يجد بعض الطلبة أن التعامل مع تشكيلة أعداد مطبوعة يساعدهم على الاستقصاء، ويمكنهم من التركيز على إيجاد الأنماط. يمكنك أن تسأل الطلبة أو تعطيهم تلميحات تساعدهم على التفكير في المضاعفات، الأعداد المثلثيّة (١، ٣، ٦، ١٠، ١٥...)، أو أيّة مجموعات أخرى مألوفة من الأعداد، مثل الأعداد المربعة (١، ٤، ٩...)، الأعداد المكعبة (١، ٨، ٢٧ ...)، الأعداد الزوجية (٢، ٤، ٦...)، الأعداد الفردية (١، ٣، ٥...) والأعداد الأولية (٢، ٣، ٥، ٧...).

إرشادات حول أنشطة أستكشف

استكشف ١

هناك العديد من الأنماط التي يمكن العثور عليها في مثلث باسكال، وقد تكون أكثر وضوحًا عند الوصول إلى الصف ٦. فيما يلي بعض الأنماط التي يمكن للطالب أن يتمكن من العثور عليها:

المثلث متناظر.

كل صف يبدأ بـ ١ وينتهي بـ ١

تظهر الأعداد الطبيعية على طول القطر الثاني.

تظهر الأعداد المثلثية (١، ٣، ٦، ١٠، ١٥ ...) على طول القطر الثالث.

مجموع الأعداد في كل صف (٢، ٤، ٨، ١٦ ...) هو قوى لعدد ٢

الأعداد التي تتألف من الأرقام الموجودة في كل صف (١١، ١٢١، ١٣٣١، ...) هي قوى لعدد ١١

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٩-١

٩-٢ مفكوك ذات الحدّين باستخدام الحد العام

المفردات

نظرية ذات الحدّين: قانون إيجاد الحد العام في مفكوك (أ + ب)^{ن}.

ملاحظات للمعلّمين

سبق أن تعلم الطلبة الربط بين معاملات مثلث باسكال والمعاملات التي نحصل عليها عند فك الأقواس. يتطرّق هذا الدرس إلى كيفية حساب معاملات ذات الحدَّين؛ ويعتمد النجاح في مفكوك ذات الحدَّين على الوضوح ودقة الرموز المستخدمة والعمل الممنهج لملاحظة التغيّر في معاملات ذات الحدَّين وقوى الحدَّين ضمن المتسلسلة.

أفكار للتعليم

باستخدام الحاسبة ونسخة من مثلث باسكال، ساعد الطلبة على الربط بين الأعداد في المثلث، و بين قيم $\binom{ن}{ر}$ ومعاملات قوى س في مفكوك بسيط لـ (١ + س)^{٥} قبل الانتقال إلى تعميم مفكوك (١ + س)^{ن}.

عندما يألف الطلبة الصيغة ويتمكنون من إيجاد المفكوك بصورة صحيحة، يمكنهم الانتقال إلى إيجاد معاملات حدود محددة دون إيجاد المفكوك كاملًا (كما في السؤال ٣ من تمارين ٩-٢).

دعم الطلبة

سيجد كثير من الطلبة أن إزالة الأقواس حول الحدود يؤدي إلى الحصول على قيم خاطئة للمعاملات و/أو إلى وضع الإشارة الخاطئة في مفكوك (أ + ب‌س)^{ن}. من المفيد وضع الأقواس حول الحدّ الثاني كاملًا مثل، (± ب س)^{ن} بدلًا من ± ب س^{ن}

مصادر أخرى مفيدة

http://www.cambridge.org/links/mctd6197 Binomial coefficients تتضمن بعض الأسئلة الموسعة

وكذلك (Nrich) http://www.cambridge.org/links/mctd6198 Binomial وهو برهان يشكل تحديًا للطلبة.

أسئلة أو مهام مناسبة للواجب المنزلي

تمارين ٩-٢

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة التاسعة: مفكوك ذات الحدّين

إجابات المعرفة القبلية

١) أ ٤س^{٢} + ١٢س + ٩

ب ١ − س − ٩س^{٢} + ٩س^{٣}

١) أ ١٢٥س^{٦}

ب −٣٢س^{١٥}

تمارين ٩-١

١) ١، ٦، ١٥، ٢٠، ١٥، ٦، ١

١، ٧، ٢١، ٣٥، ٣٥، ٢١، ٧، ١

٢) أ ١ − ٤س + ٦س^{٢} − ٤س^{٣} + س^{٤}

ب ل^{٤} + ٤ل^{٣}ق + ٦ل^{٢}ق^{٢} +٤ل ق^{٣} + ق^{٤}

ج ٨ + ١٢س + ٦س^{٢} + س^{٣}

د س^{٥} + ٥س^{٤}ص + ١٠س^{٣}ص^{٢} + ١٠س^{٢}ص^{٣} + ٥س ص^{٤} + ص^{٥}

هـ ص^{٣} + ١٢ص^{٢} + ٤٨ص + ٦٤

و أ^{٣} − ٣ أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} − ب^{٣}

ز ١٦س^{٤} + ٣٢ س^{٣}ص + ٢٤س^{٢}ص^{٢} + ٨ س ص^{٣} + ص^{٤}

ح س^{٣} − ٦س^{٢}ص + ١٢س ص^{٢} − ٨ ص^{٣}

ط ٨١ س^{٤} − ٤٣٢س^{٣} + ٨٦٤ س^{٢} − ٧٦٨ س + ٢٥٦

ي س^{٣} + ٦س + $\frac{\text{١٢}}{\text{س}}$ + $\frac{\text{٨}}{\text{س}^{٣}}$

ك س^{٦} − $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{٣}{٤}$ س$^{-٤}$ + $\frac{١}{٨}$ س$^{-٩}$

٣) أ ١٦ ب ١٠ ج −١٢ د ٨

هـ ٤٠ و ١٦٠ ز ٥٧٦٠ ح −$\frac{٣}{٢}$

٤) أ = ٨

٥) ١٦ − ٣٢س^{٢} + ٢٤س^{٤} − ٨س^{٦} + س^{٨}

٦) ٩٠

٧) $\frac{٣}{٢}$

تمارين ٩-٢

١) أ $\binom{٣}{٠}$، $\binom{٣}{١}$، $\binom{٣}{٢}$، $\binom{٣}{٣}$

ب $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

ج $\binom{٥}{٠}$، $\binom{٥}{١}$، $\binom{٥}{٢}$، $\binom{٥}{٣}$، $\binom{٥}{٤}$، $\binom{٥}{٥}$

٢) أ س^{٤} + ٤س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س + ١

ب ١ − ٥س + ١٠س^{٢} − ١٠س^{٣} + ٥ س^{٤} − س^{٥}

ج ١ + ٨س + ٢٤س^{٢} + ٣٢س^{٣} + ١٦س^{٤}

د ٢٧ + ٢٧ س + ٩س^{٢} + س^{٣}

هـ س^{٤} + ٤س^{٣}ص + ٦س^{٢}ص^{٢} + ٤س ص^{٣} + ص^{٤}

و ٣٢ − ٨٠ س + ٨٠ س^{٢} − ٤٠س^{٣} + ١٠س^{٤} − س^{٥}

ز أ^{٤} − ٨أ^{٣}ب + ٢٤أ^{٢}ب^{٢} − ٣٢أب^{٣} + ١٦ب^{٤}

ح ١٦س^{٤} + ٩٦س^{٣}ص + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} + ٢١٦س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}

ط $\frac{١}{١٦}$ س^{٤} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٣} + $\frac{٢٧}{٢}$ س^{٢} − ٥٤س + ٨١

ي ١ − $\frac{\text{س}}{٢}$ + $\frac{\text{س}^{٢}}{١٠}$ − $\frac{\text{س}^{٣}}{١٠٠}$ + $\frac{\text{س}^{٤}}{٢٠٠٠}$ − $\frac{\text{س}^{٥}}{١٠٠٠٠٠}$

ك س^{٥} − ١٥س^{٣} + ٩٠س − $\frac{٢٧٠}{\text{س}}$ + $\frac{٤٠٥}{\text{س}^{٣}}$ − $\frac{٢٤٣}{\text{س}^{٥}}$

ل س^{١٢} + ٣س^{٨} + $\frac{١٥}{٤}$ س^{٤} + $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{١٥}{١٦\text{س}^{٤}}$ + $\frac{٣}{١٦\text{س}^{٨}}$ + $\frac{١}{٦٤\text{س}^{١٢}}$

٣) أ ٤٠س^{٣} ب ١٧٥٠٠٠س^{٣}

ج ٧٢٠س^{٣} د −٢٠س^{٣}

هـ −٥٣٧٦س^{٣} و −٩٤٥٠٠٠٠س^{٣}

ز −٩٥٤٢٠٤١٦٠٠٠٠س^{٣}

٤) أ ١، ١٠س، ٤٥س^{٢}

ب ١، −٢١س، ١٨٩س^{٢}

ج ١٩٦٨٣، ٥٩٠٤٩س، ٧٨٧٣٢س^{٢}

د ٢٥٦، ٥١٢س، ٤٤٨س^{٢}

هـ ١٩٥٣١٢٥، − ٣٥١٥٦٢٥س^{٢}، ٢٨١٢٥٠٠س^{٤}

و ١٠٤٨٥٧٦س^{١٠}، − ١٣١٠٧٢٠٠س^{٩}ص، ٧٣٧٢٨٠٠٠ س^{٨}ص^{٢}

٥) ١٦٠س^{٣}، ٦٠س^{٢}، ١٢س، ١

٦) $-\frac{٤٠}{٢٧}$

٧) $\frac{٢١}{١٦}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة

١) ٦٤، ١٩٢س، ٢٤٠س^{٢}، ١٦٠س^{٣}

٢) س^{٦}، ١٢س^{٣}، ٦٠

٣) −٥, ٢٧

٤) ٦٤، ١٩٢س^{٢}، ٢٤٠س^{٤}، ١٦٠س^{٦}

٥) ٧٢٩، ٢٩١٦س، ٤٨٦٠س^{٢}

٦) أ = ٥

٧) ١٦٨٠٠

٨) ١، ٨ل س، ٢٨ل^{٢}س^{٢}

٩) أ ١، ١٠س، ٤٠س^{٢}

ب ٢٤٣، −٤٠٥س، ٢٧٠س^{٢}

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة التاسعة: مفكوك ذات الحدّين

تمارين ٩-١

١) أ س^{٤} + ٤س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س + ١

ب س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢٧س + ٢٧

ج س^{٤} + ٤س^{٣}ص + ٦س^{٢}ص^{٢} + ٤س ص^{٣} + ص^{٤}

د −س^{٥} + ٥س^{٤} − ١٠س^{٣} + ١٠س^{٢} −٥س + ١

هـ س^{٦} + ٦س^{٥}ص + ١٥س^{٤}ص^{٢} + ٢٠س^{٣}ص^{٣} + ١٥س^{٢}ص^{٤} + ٦س ص^{٥} + ص^{٦}

و ص^{٤} + ١٢ص^{٣} + ٥٤ص^{٢} + ١٠٨ص + ٨١

ز أ^{٤} − ٤أ^{٣}ب + ٦أ^{٢}ب^{٢} − ٤أب^{٣} + ب^{٤}

ح س^{٤} + ١٢س^{٣}ص + ٥٤س^{٢}ص^{٢} + ١٠٨س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}

ط س^{٤} − ١٢س^{٣}ص + ٥٤س^{٢}ص^{٢} − ١٠٨س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}

ي ٨١س^{٤} − ٣٢٤س^{٣} + ٤٨٦س^{٢} − ٣٢٤س + ٨١

ك س^{٣} + $\frac{٢٧}{س^{٣}}$ + ٩س + $\frac{٢٧}{س}$

ل س^{٩} − $\frac{١}{٨س^{٦}}$ − $\frac{٣س^{٤}}{٢}$ + $\frac{٣}{٤س}$

٢) أ ٨ ب −٨

ج −٣٢ د ٢٤٣٠

هـ $-\frac{١٦}{٢٧}$

٣) ١+ ٣س + ٣س^{٢} + س^{٣}

٤) ٢٤

٥) $\frac{١٥}{٤}$

تمارين ٩-٢

١) أ الصف ٢: $\binom{٢}{٠}$، $\binom{٢}{١}$، $\binom{٢}{٢}$

ب الصف ٦: $\binom{٦}{٠}$، $\binom{٦}{١}$، $\binom{٦}{٢}$، $\binom{٦}{٣}$، $\binom{٦}{٤}$، $\binom{٦}{٥}$، $\binom{٦}{٦}$

ج الصف ٧: $\binom{٧}{٠}$، $\binom{٧}{١}$، $\binom{٧}{٢}$، $\binom{٧}{٣}$، $\binom{٧}{٤}$، $\binom{٧}{٥}$، $\binom{٧}{٦}$، $\binom{٧}{٧}$

٢) أ $س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ١$

ب $-٨س^{٣} + ١٢س^{٢} - ٦س + ١$

ج $س^{٤} + ١٢س^{٣} + ٥٤س^{٢} + ١٠٨س + ٨١$

د $أ^{٤} - ١٢أ^{٣}ب + ٥٤أ^{٢}ب^{٢} - ١٠٨أب^{٣} + ٨١ب^{٤}$

هـ $١٦س^{٤} + ١٦٠س^{٣}ص + ٦٠٠س^{٢}ص^{٢} +$
$١٠٠٠س ص^{٣} + ٦٢٥ص^{٤}$

و $\frac{١}{١٦}س^{٤} - ٢س^{٣} + ٢٤س^{٢} - ١٢٨س + ٢٥٦$

ز $٣٢ - ٨س + \frac{٤}{٥}س^{٢} - \frac{١}{٢٥}س^{٣} + \frac{١}{١٠٠٠}س^{٤} -$
$\frac{١}{١٠٠٠٠٠}س^{٥}$

ح $س^{١٠} - \frac{٥}{٢}س^{٦} + \frac{٥}{٢}س^{٢} - \frac{٥}{٤س^{٢}} + \frac{٥}{١٦س^{٦}} -$
$\frac{١}{٣٢س^{١٠}}$

٣) أ $٩٠\ س^{٣}$ ب $٤٣٥٤٥٦\ س^{٣}$

ج $٥٤٠\ س^{٣}$ د $-٦١٢٣٦\ س^{٣}$

هـ $٢٨٠٠٠٠٠\ س^{٣}$ و $-٥٣٠٨٤١٦٠\ س^{٣}$

٤) أ $١٠٢٤س^{١٠}$، $٥١٢٠س^{٩}$، $١١٥٢٠س^{٨}$

ب $٢٥٦س^{٨}$، $-١٠٢٤س^{٧}$، $١٧٩٢س^{٦}$

ج $-١٦٣٨٤س^{٧}$، $٢٨٦٧٢س^{٦}$، $-٢١٥٠٤س^{٥}$

د $٧٢٩س^{٦}$، $٤٣٧٤س^{٥}$، $١٠٩٣٥س^{٤}$

هـ $س^{٨}$، $-٢٤س^{٧}$، $٢٥٢س^{٦}$

و $\frac{س^{٨}}{٦٥٥٣٦}$، $\frac{س^{٧}}{١٠٢٤}$، $\frac{٧س^{٦}}{٢٥٦}$

ز $س^{١٦}$، $-٢٤س^{١٤}$، $٢٥٢س^{١٢}$

ح $٥١٢س^{٩}$، $-١١٥٢٠س^{٨}ص$، $١١٥٢٠٠س^{٧}ص^{٢}$

٥) ١، $١٨س$، $١٣٥س^{٢}$، $٥٤٠س^{٣}$

٦) ١، $٣س$، $\frac{٣٣س^{٢}}{٨}$، $\frac{٥٥س^{٣}}{١٦}$

٧) ١، $-٤٠س$، $٧٠٠س^{٢}$، $-٧٠٠٠س^{٣}$

٨) $٦٤س^{٦}$، $٥٧٦س^{٥}$، $٢١٦٠س^{٤}$

٩) -٢٨٠

١٠) $\frac{٧٠}{٨١}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة

١) -١٠٨٨٦٤

٢) $٤س\ (٢٧ + ٤س^{٢})$

٣) ١، $٢٤س$، $٢٥٢س^{٢}$، $١٥١٢س^{٣}$

٤) $١٦ + ٩٦س + ٢١٦س^{٢} + ٢١٦س^{٣} + ٨١س^{٤}$

٥) ١، $-٢٤س$، $٢٦٤س^{٢}$

٦) ٤٣٧٥

٧) -٦٧٢

٨) $... + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} + ٩٦س ص^{٣} + ١٦ص^{٤}$

٩) أ ١، $٦ك س$، $١٥ك^{٢}س^{٢}$، $٢٠ك^{٣}س^{٣}$

ب ٠٫٤

١٠) ٣ : ٥

١١) ٥

الوحدة التاسعة : حلول تمارين كتاب الطالب

مفكوك ذات الحدّين

تمارين ٩-١

١) أ الصف الخامس هو: ١، ٥، ١٠، ١٠، ٥، ١

نجمع الأزواج المتجاورة من الصف الخامس ونضع الرقم واحد على كل طرف من الطرفَين لنكتب الصف السادس، هو

١، ٦، ١٥، ٢٠، ١٥، ٦، ١.

نجمع الأزواج المتجاورة من الصف السادس ونضع الرقم واحد على كل طرف من الطرفَين لنكتب الصف السابع، هو

١، ٧، ٢١، ٣٥، ٣٥، ٢١، ٧، ١.

٢) أ $(١ - س)^{٤}$

القوة هي ٤ ∴ نستخدم الصف الرابع من مثلث باسكال، هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

$(١ - س)^{٤} = ١(١)^{٤} + ٤(١)^{٣}(-س) + ٦(١)^{٢}(-س)^{٢} + ٤(١)(-س)^{٣} + ١(-س)^{٤}$

$= ١ - ٤س + ٦س^{٢} - ٤س^{٣} + س^{٤}$

ب $(ل + ق)^{٤}$

القوة هي ٤ ∴ نستخدم الصف الرابع من مثلث باسكال، هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

$(ل + ق)^{٤} = ١(ل)^{٤} + ٤(ل)^{٣}(ق) + ٦(ل)^{٢}(ق)^{٢} + ٤(ل)(ق)^{٣} + ١(ق)^{٤}$

$= ل^{٤} + ٤ل^{٣}ق + ٦ل^{٢}ق^{٢} + ٤لق^{٣} + ق^{٤}$

ج $(٢ + س)^{٣}$

القوة هي ٣ ∴ نستخدم الصف الثالث من مثلث باسكال، هو ١، ٣، ٣، ١

$(٢ + س)^{٣} = ١(٢)^{٣} + ٣(٢)^{٢}(س) + ٣(٢)(س)^{٢} + ١(س)^{٣}$

$= ٨ + ١٢س + ٦س^{٢} + س^{٣}$

د $(س + ص)^{٥}$

القوة هي ٥ ∴ نستخدم الصف الخامس من مثلث باسكال، هو ١، ٥، ١٠، ١٠، ٥، ١

$(س + ص)^{٥} = ١(س)^{٥} + ٥(س)^{٤}(ص) + ١٠(س)^{٣}(ص)^{٢} + ١٠(س)^{٢}(ص)^{٣} + ٥س(ص)^{٤} + ١(ص)^{٥}$

$= س^{٥} + ٥س^{٤}ص + ١٠س^{٣}ص^{٢} + ١٠س^{٢}ص^{٣} + ٥سص^{٤} + ص^{٥}$

هـ $(ص + ٤)^{٣}$

القوة هي ٣ ∴ نستخدم الصف الثالث من مثلث باسكال، هو ١، ٣، ٣، ١

$(ص + ٤)^{٣} = ١(ص)^{٣} + ٣(ص)^{٢}(٤) + ٣(ص)(٤)^{٢} + ١(٤)^{٣}$

$= ص^{٣} + ١٢ص^{٢} + ٤٨ص + ٦٤$

و $(أ - ب)^{٣}$

القوة هي ٣ $\therefore$ نستخدم الصف الثالث من مثلث باسكال، هو ١، ٣، ٣، ١

$$(أ - ب)^{٣} = ١(أ)^{٣} + ٣(أ)^{٢}(-ب) + ٣(أ)(-ب)^{٢} + ١(-ب)^{٣}$$

$$= أ^{٣} - ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} - ب^{٣}$$

ز $(٢س + ص)^{٤}$

القوة هي ٤ $\therefore$ نستخدم الصف الرابع من مثلث باسكال، هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

$$(٢س + ص)^{٤} = ١(٢س)^{٤} + ٤(٢س)^{٣}(ص) + ٦(٢س)^{٢}(ص)^{٢} + ٤(٢س)(ص)^{٣} + ١(ص)^{٤}$$

$$= ١٦س^{٤} + ٣٢س^{٣}ص + ٢٤س^{٢}ص^{٢} + ٨س ص^{٣} + ص^{٤}$$

ح $(س - ٢ص)^{٣}$

القوة هي ٣ $\therefore$ نستخدم الصف الثالث من مثلث باسكال، هو ١، ٣، ٣، ١

$$(س - ٢ص)^{٣} = ١(س)^{٣} + ٣(س)^{٢}(-٢ص) + ٣(س)(-٢ص)^{٢} + ١(-٢ص)^{٣}$$

$$= س^{٣} - ٦س^{٢}ص + ١٢س ص^{٢} - ٨ص^{٣}$$

ط $(٣س - ٤)^{٤}$

القوة هي ٤ $\therefore$ نستخدم الصف الرابع من مثلث باسكال، هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

$$(٣س - ٤)^{٤} = ١(٣س)^{٤} + ٤(٣س)^{٣}(-٤) + ٦(٣س)^{٢}(-٤)^{٢} + ٤(٣س)(-٤)^{٣} + ١(-٤)^{٤}$$

$$= ٨١س^{٤} - ٤٣٢س^{٣} + ٨٦٤س^{٢} - ٧٦٨س + ٢٥٦$$

ي $\left(س + \frac{٢}{س}\right)^{٣}$

القوة هي ٣ $\therefore$ نستخدم الصف الثالث من مثلث باسكال، هو ١، ٣، ٣، ١

$$\left(س + \frac{٢}{س}\right)^{٣} = ١(س)^{٣} + ٣(س)^{٢}\left(\frac{٢}{س}\right) + ٣(س)\left(\frac{٢}{س}\right)^{٢} + ١\left(\frac{٢}{س}\right)^{٣} = س^{٣} + ٦س + \frac{١٢}{س} + \frac{٨}{س^{٣}}$$

ك $\left(س^{٢} - \frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٣}$

القوة هي ٣ $\therefore$ نستخدم الصف الثالث من مثلث باسكال، هو ١، ٣، ٣، ١

$$\left(س^{٢} - \frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٣} = ١(س^{٢})^{٣} + ٣(س^{٢})^{٢}\left(-\frac{١}{٢س^{٣}}\right) + ٣(س^{٢})\left(-\frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٢} + ١\left(-\frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٣}$$

$$= س^{٦} - \frac{٣س}{٢} + \frac{٣}{٤س^{٤}} - \frac{١}{٨س^{٩}}$$

٣) أ يأتي الحد $س^{٣}$ من الحد الثاني للمفكوك.

نحتاج إلى الصف الرابع من مثلث باسكال، هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

يعطينا هذا $٤(س)^{٣}(٤)$ $\therefore$ معامل $س^{٣}$ هو ١٦

ب الحد الذي يعطينا $س^{٣}$ هو $(١)^{٢}(س)^{٣}$

كما نحتاج إلى الصف الخامس من مثلث باسكال، وهو ١، ٥، ١٠، ١٠، ٥، ١، وعلينا استخدام العدد ١٠ الأول.

يعطينا هذا $١٠(١)^٢(س)^٣$ ∴ المعامل هو ١٠

ج نحتاج إلى الـ ٤ من مثلث باسكال مضروبة في $(٣)^١$ مضروبة في $(-س)^٣$.

$٤(٣)^١(-س)^٣ = -١٢س^٣$ والمعامل هو -١٢

د $١(٢س)^٣ = ٨س^٣$ ∴ المعامل هو ٨

هـ نحتاج إلى الـ ١٠ من مثلث باسكال وعندنا $١٠(س)^٣(-٢)^٢ = ٤٠س^٣$ ∴ المعامل هو ٤٠

و يأتي الحد $س^٣$ من الحد الثاني للمفكوك.

نحتاج إلى الصف الرابع من مثلث باسكال، والذي هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

يعطينا هذا $٤(٢س)^٣(٥) = ١٦٠س^٣$ ∴ معامل $س^٣$ هو ١٦٠

ز نحتاج إلى الـ ١٠ من مثلث باسكال وعندنا $١٠(٤س)^٣(-٣)^٢ = ٥٧٦٠س^٣$ ∴ المعامل هو ٥٧٦٠

ح نحتاج إلى الـ ٤ من مثلث باسكال مضروبة في $(٣)^١$ مضروبة في $\left(-\frac{١}{٢}س\right)^٣$

$٤(٣)^١\left(-\frac{١}{٢}س\right)^٣ = -١{,}٥س^٣$، والمعامل هو -١,٥

٤) نحتاج إلى الـ ٣ (من مثلث باسكال) مضروبة في $(٢)^٢$ (أ س)

∴ ٣(٤)(أس) يعطينا ١٢أ = ٩٦، أ = ٨

٥) نبدأ من خلال فك أقواس $(٢ - ص)^٤$

القوة هي ٤ ∴ نستخدم الصف الرابع من مثلّث باسكال، هو ١، ٤، ٦، ٤، ١

$(٢ - ص)^٤ = ١(٢)^٤ + ٤(٢)^٣(-ص) + ٦(٢)^٢(-ص)^٢ + ٤(٢)(-ص)^٣ + ١(-ص)^٤$

$= ١٦ - ٣٢ص + ٢٤ص^٢ - ٨ص^٣ + ص^٤$

استبدل الآن ص بـ $س^٢$ لتحصل على $١٦ - ٣٢س^٢ + ٢٤س^٤ - ٨س^٦ + س^٨$

٦) يأتي معامل س من الحد الذي يتضمن $(س)^٣$، $\left(-\frac{٣}{س}\right)^٢$

نحتاج إلى الصف الخامس من مثلث باسكال، ١، ٥، ١٠، ١٠، ٥، ١، ونحتاج إلى العدد ١٠ الأول.

يعطينا هذا $١٠(س^٣)\left(-\frac{٣}{س}\right)^٢ = ١٠(س^٣)\left(\frac{٩}{س^٢}\right) = ٩٠س$

معامل س هو ٩٠

٧) الحد الخالي من س يأتي من الحد الذي يتضمن $(س)^٢$، $\left(\frac{١}{٢س}\right)^٢$

نحتاج إلى الصف الرابع من مثلث باسكال، ١، ٤، ٦، ٤، ١، ونحتاج إلى العدد ٦

يعطينا هذا $٦(س)^٢\left(\frac{١}{٢س}\right)^٢ = \left(\frac{٦س^٢}{٤س^٢}\right) = \frac{٣}{٢}$

الحد الخالي من س هو $\frac{٣}{٢}$

تمارين ٩-٢

١) أ $\binom{٣}{٠}$، $\binom{٣}{١}$، $\binom{٣}{٢}$، $\binom{٣}{٣}$

ب $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

ج $\binom{٥}{٠}$، $\binom{٥}{١}$، $\binom{٥}{٢}$، $\binom{٥}{٣}$، $\binom{٥}{٤}$، $\binom{٥}{٥}$

٢) أ القوة هي ٤ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

$$(١ + س)^{٤} = \binom{٤}{٠}(١)^{٤} + \binom{٤}{١}(١)^{٣}(س) + \binom{٤}{٢}(١)^{٢}(س)^{٢} + \binom{٤}{٣}(١)^{١}(س)^{٣} + \binom{٤}{٤}(س)^{٤}$$

$$= ١ + ٤س + ٦س^{٢} + ٤س^{٣} + س^{٤}$$

ب القوة هي ٥ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٥}{٠}$، $\binom{٥}{١}$، $\binom{٥}{٢}$، $\binom{٥}{٣}$، $\binom{٥}{٤}$، $\binom{٥}{٥}$

$$(١ - س)^{٥} = \binom{٥}{٠}(١)^{٥} + \binom{٥}{١}(١)^{٤}(-س)^{١} + \binom{٥}{٢}(١)^{٣}(-س)^{٢} + \binom{٥}{٣}(١)^{٢}(-س)^{٣} + \binom{٥}{٤}(١)^{١}(-س)^{٤} + \binom{٥}{٥}(-س)^{٥}$$

$$= ١ - ٥س - ١٠س^{٢} + ١٠س^{٣} + ٥س^{٤} - س^{٥}$$

ج القوة هي ٤ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

$$(١ + ٢س)^{٤} = \binom{٤}{٠}(١)^{٤} + \binom{٤}{١}(١)^{٣}(٢س) + \binom{٤}{٢}(١)^{٢}(٢س)^{٢} + \binom{٤}{٣}(١)^{١}(٢س)^{٣} + \binom{٤}{٤}(٢س)^{٤}$$

$$= ١ + ٨س + ٢٤س^{٢} + ٣٢س^{٣} + ١٦س^{٤}$$

د القوة هي ٣ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٣}{٠}$، $\binom{٣}{١}$، $\binom{٣}{٢}$، $\binom{٣}{٣}$

$$(٣ + س)^{٣} = \binom{٣}{٠}(٣)^{٣} + \binom{٣}{١}(٣)^{٢}(س) + \binom{٣}{٢}(٣)^{١}(س)^{٢} + \binom{٣}{٣}(س)^{٣}$$

$$= ٢٧ + ٢٧س + ٩س^{٢} + س^{٣}$$

هـ القوة هي ٤ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

$$(س + ص)^{٤} = \binom{٤}{٠}(س)^{٤} + \binom{٤}{١}(س)^{٣}(ص) + \binom{٤}{٢}(س)^{٢}(ص)^{٢} + \binom{٤}{٣}(س)^{١}(ص)^{٣} + \binom{٤}{٤}(ص)^{٤}$$

$$= س^{٤} + ٤س^{٣}ص + ٦س^{٢}ص^{٢} + ٤س\,ص^{٣} + ص^{٤}$$

و القوة هي ٥ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٥}{٠}$، $\binom{٥}{١}$، $\binom{٥}{٢}$، $\binom{٥}{٣}$، $\binom{٥}{٤}$، $\binom{٥}{٥}$

$$(٢ - س)^{٥} = \binom{٥}{٠}(٢)^{٥} + \binom{٥}{١}(٢)^{٤}(-س)^{١} + \binom{٥}{٢}(٢)^{٣}(-س)^{٢} + \binom{٥}{٣}(٢)^{٢}(-س)^{٣} + \binom{٥}{٤}(٢)^{١}(-س)^{٤} + \binom{٥}{٥}(-س)^{٥}$$

$$= ٣٢ - ٨٠س + ٨٠س^{٢} - ٤٠س^{٣} + ١٠س^{٤} - س^{٥}$$

ز القوة هي ٤ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

$$(أ - ٢ب)^{٤} = \binom{٤}{٠}(أ)^{٤} + \binom{٤}{١}(أ)^{٣}(-٢ب) + \binom{٤}{٢}(أ)^{٢}(-٢ب)^{٢} + \binom{٤}{٣}(أ)^{١}(-٢ب)^{٣} + \binom{٤}{٤}(-٢ب)^{٤}$$

$$= أ^{٤} - ٨أ^{٣}ب + ٢٤أ^{٢}ب^{٢} - ٣٢أب^{٣} + ١٦ب^{٤}$$

ح القوة هي ٤ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

$$(٢س + ٣ص)^{٤} = \binom{٤}{٠}(٢س)^{٤} + \binom{٤}{١}(٢س)^{٣}(٣ص) + \binom{٤}{٢}(٢س)^{٢}(٣ص)^{٢} + \binom{٤}{٣}(٢س)^{١}(٣ص)^{٣} + \binom{٤}{٤}(٣ص)^{٤}$$

$$= ١٦س^{٤} + ٩٦س^{٣}ص + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} + ٢١٦سص^{٣} + ٨١ص^{٤}$$

ط القوة هي ٤ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٤}{٠}$، $\binom{٤}{١}$، $\binom{٤}{٢}$، $\binom{٤}{٣}$، $\binom{٤}{٤}$

$$\left(\frac{١}{٢}س - ٣\right)^{٤} = \binom{٤}{٠}\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٤} + \binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٣}(-٣) + \binom{٤}{٢}\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٢}(-٣)^{٢} + \binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٢}س\right)^{١}(-٣)^{٣} + \binom{٤}{٤}(-٣)^{٤}$$

$$= \frac{١}{١٦}س^{٤} - \frac{٣}{٢}س^{٣} + \frac{٢٧}{٢}س^{٢} - ٥٤س + ٨١$$

ي القوة هي ٥ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٥}{٠}$، $\binom{٥}{١}$، $\binom{٥}{٢}$، $\binom{٥}{٣}$، $\binom{٥}{٤}$، $\binom{٥}{٥}$

$$\left(١ - \frac{س}{١٠}\right)^{٥} = \binom{٥}{٠}(١)^{٥} + \binom{٥}{١}(١)^{٤}\left(-\frac{س}{١٠}\right)^{١} + \binom{٥}{٢}(١)^{٣}\left(-\frac{س}{١٠}\right)^{٢} + \binom{٥}{٣}(١)^{٢}\left(-\frac{س}{١٠}\right)^{٣} + \binom{٥}{٤}(١)^{١}\left(-\frac{س}{١٠}\right)^{٤} + \binom{٥}{٥}\left(-\frac{س}{١٠}\right)^{٥}$$

$$= ١ - \frac{١}{٢}س + \frac{١}{١٠}س^{٢} - \frac{١}{١٠٠}س^{٣} + \frac{١}{٢٠٠٠}س^{٤} - \frac{١}{١٠٠٠٠٠}س^{٥}$$

ك القوة هي ٥ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٥}{٠}$، $\binom{٥}{١}$، $\binom{٥}{٢}$، $\binom{٥}{٣}$، $\binom{٥}{٤}$، $\binom{٥}{٥}$

$$\left(س - \frac{٣}{س}\right)^{٥} = \binom{٥}{٠}(س)^{٥} + \binom{٥}{١}(س)^{٤}\left(-\frac{٣}{س}\right)^{١} + \binom{٥}{٢}(س)^{٣}\left(-\frac{٣}{س}\right)^{٢} + \binom{٥}{٣}(س)^{٢}\left(-\frac{٣}{س}\right)^{٣}$$

$$+ \binom{٥}{٤}(س)^{١}\left(-\frac{٣}{س}\right)^{٤} + \binom{٥}{٥}\left(-\frac{٣}{س}\right)^{٥}$$

$$= س^{٥} - ١٥س^{٣} + ٩٠س - \frac{٢٧٠}{س} + \frac{٤٠٥}{س^{٣}} - \frac{٢٤٣}{س^{٥}}$$

ل القوة هي ٦ إذًا نستخدم المعاملات $\binom{٦}{٠}$، $\binom{٦}{١}$، $\binom{٦}{٢}$، $\binom{٦}{٣}$، $\binom{٦}{٤}$، $\binom{٦}{٥}$، $\binom{٦}{٦}$

$$\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٦} = \binom{٦}{٠}(س^{٢})^{٦} + \binom{٦}{١}(س^{٢})^{٥}\left(\frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{١} + \binom{٦}{٢}(س^{٢})^{٤}\left(\frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٢} + \binom{٦}{٣}(س^{٢})^{٣}\left(\frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٣}$$

$$+ \binom{٦}{٤}(س^{٢})^{٢}\left(\frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٤} + \binom{٦}{٥}(س^{٢})^{١}\left(\frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٥} + \binom{٦}{٦}\left(\frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٦}$$

$$= س^{١٢} + ٣س^{٨} + \frac{١٥}{٤}س^{٤} + \frac{٥}{٢} + \frac{١٥}{١٦س^{٤}} + \frac{٣}{١٦س^{٨}} + \frac{١}{٦٤س^{١٢}}$$

٣) أ $\binom{٥}{٣}(٢)^{٢}(س)^{٣} = ٤٠س^{٣}$

ب $\binom{٨}{٣}(٥)^{٥}(س)^{٣} = ١٧٥٠٠٠س^{٣}$

ج $\binom{٥}{٣}(٣)^{٢}(٢س)^{٣} = ٧٢٠س^{٣}$

د $\binom{٦}{٣}(١)^{٣}(-س)^{٣} = -٢٠س^{٣}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة

١) الحدود الأربعة الأولى في مفكوك $(٢ + \text{س})^{٦}$ هي $\binom{٦}{٠}(٢)^{٦}$، $\binom{٦}{١}(٢)^{٥}(\text{س})^{١}$، $\binom{٦}{٢}(٢)^{٤}(\text{س})^{٢}$، $\binom{٦}{٣}(٢)^{٣}(\text{س})^{٣}$

أي ٦٤، ١٩٢س، ٢٤٠$\text{س}^{٢}$، ١٦٠$\text{س}^{٣}$

٢) الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{٦}$ هي $\binom{٦}{٠}(\text{س})^{٦}$، $\binom{٦}{١}(\text{س})^{٥}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{١}$، $\binom{٦}{٢}(\text{س})^{٤}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢}$

أي $\text{س}^{٦}$ ، ١٢$\text{س}^{٣}$، ٦٠

٣) الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{٣}$ هو $\binom{١٢}{٣}(١)^{٩}\left(-\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٣}$، ∴ المعامل هو $\binom{١٢}{٣}(١)^{٩}\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} = -٢٧,٥$

٤) الحدود الأربعة الأولى في مفكوك $(٢ + \text{س}^{٢})^{٦}$ هي $\binom{٦}{٠}(٢)^{٦}$، $\binom{٦}{١}(٢)^{٥}(\text{س}^{٢})^{١}$، $\binom{٦}{٢}(٢)^{٤}(\text{س}^{٢})^{٢}$، $\binom{٦}{٣}(٢)^{٣}(\text{س}^{٢})^{٣}$

أي ٦٤، ١٩٢$\text{س}^{٢}$، ٢٤٠$\text{س}^{٤}$، ١٦٠$\text{س}^{٦}$

٥) الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(٣ + ٢\text{س})^{٦}$ هي $\binom{٦}{٠}(٣)^{٦}$، $\binom{٦}{١}(٣)^{٥}(٢\text{س})^{١}$، $\binom{٦}{٢}(٣)^{٤}(٢\text{س})^{٢}$

أي ٧٢٩، ٢٩١٦س، ٤٨٦٠$\text{س}^{٢}$

٦) الحدان اللذان لهما معاملان متساويان هما $\binom{٦}{١}(\text{أ})^{٥}(٢\text{س})^{١}$، $\binom{٦}{٢}(\text{أ})^{٤}(٢\text{س})^{٢}$

$١٢\text{أ}^{٥} = ٦٠\text{أ}^{٤}$ ما يعطي أ = ٥

٧) $\binom{٧}{١}(٢)^{٦}(\text{أس})^{١} = -٢٢٤٠\,\text{س}$

$٧ \times ٦٤\text{أ} = -٢٢٤٠$

$\text{أ} = -٥$

$\binom{٧}{٢}(٢)^{٥}(-٥\text{س})^{٢} = \binom{٧}{٢}(٢)^{٥}\ ٢٥ \times \text{س}^{٢}$

∴ معامل $\text{س}^{٢}$ هو ١٦٨٠٠

٨) الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(١ + \text{لس})^{٨}$ هي $\binom{٨}{٠}(١)^{٨}$، $\binom{٨}{١}(١)^{٧}(\text{لس})^{١}$، $\binom{٨}{٢}(١)^{٦}(\text{لس})^{٢}$

أي ١، ٨لس، ٢٨$\text{ل}^{٢}\text{س}^{٢}$

٩) **أ** الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(١ + ٢\text{س})^{٥}$ هي $\binom{٥}{٠}(١)^{٥}$، $\binom{٥}{١}(١)^{٤}(٢\text{س})^{١}$، $\binom{٥}{٢}(١)^{٣}(٢\text{س})^{٢}$

أي ١، ١٠س، ٤٠$\text{س}^{٢}$

ب الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(٣ - \text{س})^{٥}$ هي $\binom{٥}{٠}(٣)^{٥}$، $\binom{٥}{١}(٣)^{٤}(-\text{س})^{١}$، $\binom{٥}{٢}(٣)^{٣}(-\text{س})^{٢}$

أي ٢٤٣، (−٤٠٥)س، ٢٧٠$\text{س}^{٢}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة

١) الحدود الأربعة الأولى في مفكوك $(\text{٢} + \text{س})^{\text{٦}}$ هي $\binom{\text{٦}}{\text{٠}}(\text{٢})^{\text{٦}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{١}}(\text{٢})^{\text{٥}}(\text{س})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٢}}(\text{٢})^{\text{٤}}(\text{س})^{\text{٢}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٣}}(\text{٢})^{\text{٣}}(\text{س})^{\text{٣}}$

أي ٦٤، ١٩٢س، ٢٤٠$\text{س}^{\text{٢}}$، ١٦٠$\text{س}^{\text{٣}}$

٢) الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٦}}$ هي $\binom{\text{٦}}{\text{٠}}(\text{س})^{\text{٦}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{١}}(\text{س})^{\text{٥}}\left(\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{١}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٢}}(\text{س})^{\text{٤}}\left(\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٢}}$

أي $\text{س}^{\text{٦}}$ ، ١٢$\text{س}^{\text{٣}}$، ٦٠

٣) الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{\text{٣}}$ هو $\binom{\text{١٢}}{\text{٣}}(\text{١})^{\text{٩}}\left(-\frac{\text{س}}{\text{٢}}\right)^{\text{٣}}$، $\therefore$ المعامل هو $\binom{\text{١٢}}{\text{٣}}(\text{١})^{\text{٩}}\left(-\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{٣}} = -\text{٢٧,٥}$

٤) الحدود الأربعة الأولى في مفكوك $(\text{٢} + \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٦}}$ هي $\binom{\text{٦}}{\text{٠}}(\text{٢})^{\text{٦}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{١}}(\text{٢})^{\text{٥}}(\text{س}^{\text{٢}})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٢}}(\text{٢})^{\text{٤}}(\text{س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٣}}(\text{٢})^{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}})^{\text{٣}}$

أي ٦٤، ١٩٢$\text{س}^{\text{٢}}$، ٢٤٠$\text{س}^{\text{٤}}$، ١٦٠$\text{س}^{\text{٦}}$

٥) الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(\text{٣} + \text{٢س})^{\text{٦}}$ هي $\binom{\text{٦}}{\text{٠}}(\text{٣})^{\text{٦}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{١}}(\text{٣})^{\text{٥}}(\text{٢س})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٢}}(\text{٣})^{\text{٤}}(\text{٢س})^{\text{٢}}$

أي ٧٢٩، ٢٩١٦س، ٤٨٦٠$\text{س}^{\text{٢}}$

٦) الحدان اللذان لهما معاملان متساويان هما $\binom{\text{٦}}{\text{١}}(\text{أ})^{\text{٥}}(\text{٢س})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٦}}{\text{٢}}(\text{أ})^{\text{٤}}(\text{٢س})^{\text{٢}}$

١٢$\text{أ}^{\text{٥}}$ = ٦٠$\text{أ}^{\text{٤}}$ ما يعطي أ = ٥

٧) $\binom{\text{٧}}{\text{١}}(\text{٢})^{\text{٦}}(\text{أس})^{\text{١}} = -\text{٢٢٤٠س}$

٧ × ٦٤أ = −٢٢٤٠

أ = −٥

$\binom{\text{٧}}{\text{٢}}(\text{٢})^{\text{٥}}(-\text{٥س})^{\text{٢}} = \binom{\text{٧}}{\text{٢}}(\text{٢})^{\text{٥}}\ \text{٢٥} \times \text{س}^{\text{٢}}$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{\text{٢}}$ هو ١٦٨٠٠

٨) الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(\text{١} + \text{لس})^{\text{٨}}$ هي $\binom{\text{٨}}{\text{٠}}(\text{١})^{\text{٨}}$، $\binom{\text{٨}}{\text{١}}(\text{١})^{\text{٧}}(\text{لس})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٨}}{\text{٢}}(\text{١})^{\text{٦}}(\text{لس})^{\text{٢}}$

أي ١، ٨لس، ٢٨$\text{ل}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}$

٩) **أ** الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(\text{١} + \text{٢س})^{\text{٥}}$ هي $\binom{\text{٥}}{\text{٠}}(\text{١})^{\text{٥}}$، $\binom{\text{٥}}{\text{١}}(\text{١})^{\text{٤}}(\text{٢س})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٥}}{\text{٢}}(\text{١})^{\text{٣}}(\text{٢س})^{\text{٢}}$

أي ١، ١٠س، ٤٠$\text{س}^{\text{٢}}$

ب الحدود الثلاثة الأولى في مفكوك $(\text{٣} - \text{س})^{\text{٥}}$ هي $\binom{\text{٥}}{\text{٠}}(\text{٣})^{\text{٥}}$، $\binom{\text{٥}}{\text{١}}(\text{٣})^{\text{٤}}(-\text{س})^{\text{١}}$، $\binom{\text{٥}}{\text{٢}}(\text{٣})^{\text{٣}}(-\text{س})^{\text{٢}}$

أي ٢٤٣، (−٤٠٥)س، ٢٧٠$\text{س}^{\text{٢}}$

تم بحمد الله

الرياضيات الأساسية

دليل المعلّم

الصف الحادي عشر

يتوافر في دليل المعلم الدعم لتخطيط الدروس وتقديمها بأسلوب واضح، تغني المعلمين عن بذل الوقت والجهد في تحضير لدروس والإجابة عن المسائل المطروحة في كتاب الطالب.

من ميزات دليل المعلم أنه يقدّم:

- أفكارًا وإرشادات داعمة لكل وحدة، بما في ذلك شرائح باوربوينت PowerPoint لعرضها أمام طلبة الصف.
- توجيهات حول كيفية مساعدة الطلبة على التقدم في الموضوعات.
- إجابات عن جميع الأسئلة والتمارين الواردة في كتاب الطالب وكتاب الأنشطة.

يشمل منهج الرياضيات للصف الحادي عشر من هذه السلسلة أيضًا:

– كتاب الطالب
– كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om

الرياضيات الأساسية
الصف الحادي عشر
الفصل الدراسي الثاني
دليل المعلّم
الطبعة التجريبية 1444هـ - 2022م